АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЦЕНТРОСОЮЗА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КООПЕРАЦИИ»
КАЗАНСКИЙ КООПЕРАТИВНЫЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

Поташев А.В., Поташева Е.В.

МАТЕМАТИКА

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

для студентов, обучающихся по направлению подготовки

080100.62 Экономика

Казань 2012

Поташев А.В., Поташева Е.В. Математика. Задания для организации самостоятельной работы – Казань: Казанский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, 2012. – 132 с.

Задания для организации самостоятельной работы по дисциплине «Математика» (цикла общих математических и естественно-научных дисциплин федерального компонента учебного плана) для направления подготовки 080100.62 Экономика составлены д.ф.-м.н., профессором Поташевым А.В., профессором кафедры «Инженерно-технические дисциплины и сервис» Казанского кооперативного института и к.т.н Поташевой Е.В., доцентом кафедры «Инженерно-технические дисциплины и сервис» Казанского кооперативного института в соответствии с учебным планом дисциплины «Математика», утвержденным ученым советом Российского университета кооперации от 26 апреля 2012 г., протокол №4., и рабочей программой от 10 сентября 2012 г., протокол № 1.

Рецензент: доцент кафедры инженерно-технических дисциплин и сервиса Казанского кооперативного института (филиала) Российского университета кооперации кандидат технических наук, доцент А.Н. Козар.

Одобрено и рекомендовано к изданию решением кафедры «Инженерно-технические дисциплины и сервис» Казанского кооперативного института (филиала) Российского университета кооперации от 24 сентября 2012 г., протокол № 2.

Заведующий кафедрой ______________________________ А.М. Мухаметшин

ВВЕДЕНИЕ

Данная разработка составлена в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» и включает вопросы для самостоятельного изучения, контрольные вопросы и практические задания для самостоятельной работы, выполнение которых является обязательным для допуска студента к сессии.

Задания для самостоятельной работы оформляются письменно и сдаются на проверку до начала сессии.

РАЗДЕЛ. I. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Тема 1. Элементы теории множеств. Понятие функции

1.1. Вопросы для самостоятельного изучения

1.1.1. Элементы теории множеств

Множество – это совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку в единое.

Объекты, из которых состоит множество, называются **элементами множества**.

Множества обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, X, Y, ..., а их элементы – малыми буквами: a, b, x, y, ...

Говорят, что элемент a **принадлежит** множеству A, и пишут $a \in A$ (A содержит a). Запись $a \notin A$ (или $a \bar{\in} A$) означает, что элемент a **не принадлежит** множеству A. Для наглядности множество A будем изображать в виде плоской геометрической фигуры, например, в виде круга (точки круга – элементы множества A) (рис. 1.1.1).

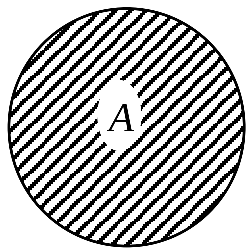


рис. 1.1.1

Множества делятся на **конечные** и **бесконечные**. Конечные множества содержат конечное число элементов, их можно задать перечислением элементов.

Примеры.

$$A = \{a, b, c, ..., p\};\ C = \{-2, 3, 0, 1\};\ B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}.$$

Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.

Множество можно задать **характеристическим свойством** его элементов – свойством, которым обладают все элементы этого множества и только они. Записывают так: $A = \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – характеристическое свойство.

$A = \{x : x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\}$ – конечное множество,

$B = \{x : x > 1\}$ – бесконечное множество.

Множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пустое множество $\varnothing$ – это множество, которое не содержит ни одного элемента.

Множество B называется **подмножеством** множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A.

Обозначение: $B \subset A$.

Иногда говорят: A **включает** B, или B **содержится** в A. Для любого множества A справедливо: $A \subset A$, $\varnothing \subset A$. Геометрическое изображение $B \subset A$ показано на рис. 1.1.2.

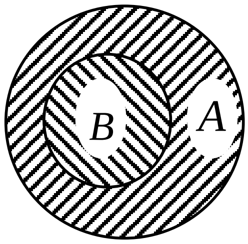


рис. 1.1.2

1.1.2. Операции над множествами

1) Пересечением $A \bigcap B$ **множеств** A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно A и B.

Таким образом, $A \bigcap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

На рис. 1.1.3 множество $A \bigcap B$ выделено двойной штриховкой. Множества A и B могут быть такими, что их пересечение будет пустым множеством: $A \bigcap B = \varnothing$ (рис. 1.1.4).

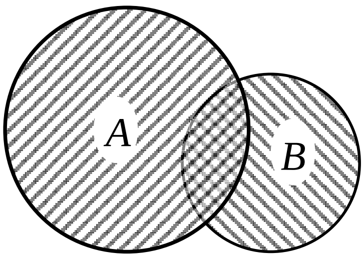


рис. 1.1.3

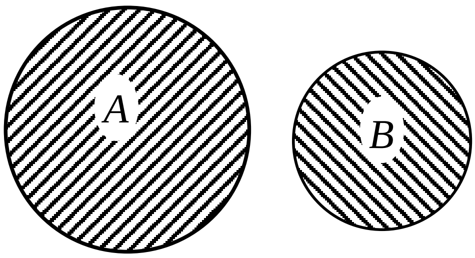


рис. 1.1.4

2) Объединением $A \bigcup B$ **множеств** A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B.

Таким образом, $A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

На рис. 1.1.5,а,б множество $A \bigcup B$ выделено штриховкой.

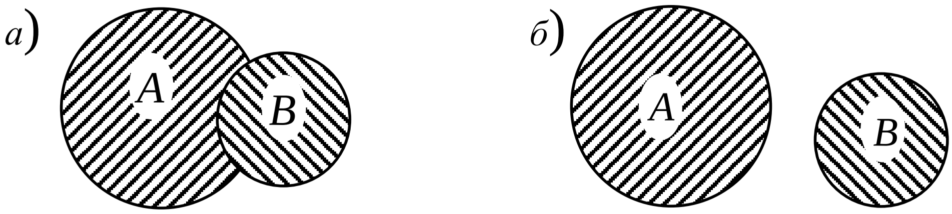


рис. 1.1.5

3) Разностью $A \setminus B$ **множеств** A и B называется множество, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих B.

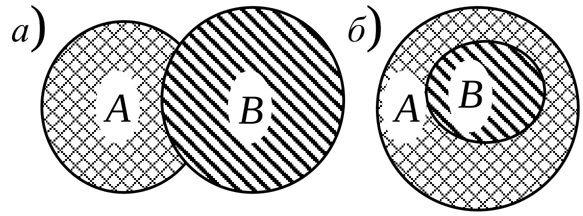


рис. 1.1.6

Таким образом,

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \overline{\in} B\}$.

На рис. 1.1.6 множество $A \setminus B$ выделено двойной штриховкой.

Если B – подмножество A, то разность $A \setminus B$ также называют **дополнением** множества B до множества A (рис. 1.1.6,б).

1.1.3. Отображение множеств. Мощность множества.

Говорят, что задано **отображение** множества A в множество B, если каждому элементу x из A поставлен в соответствие единственный элемент y из B.

Обозначение: $A \xrightarrow{f} B$, или $f : A \to B$.

1.1.4. Употребление математической символики. Кванторы общности, существования и единственности

В математике часто используется **символическая форма** записи. Ранее уже были введены такие символы, как $\varnothing$, $\in$, $\notin$, $\overline{\in}$, $\setminus$, $\subset$, $\bigcup$, $\bigcap$, $\sim$, $\Rightarrow$, $\xrightarrow{f}$.

Кроме них при записи определений и формулировок теорем будут также использоваться и другие символы, в частности, символы логических операций ($\Leftrightarrow$ – «**… тогда и только тогда, когда …**»; $\Rightarrow$ – «**если …, то …**»; $\wedge$ – «**… и …**», $\vee$ – «**… или …**»).

Также в математике используются операции, которые называются **кванторными операциями**.

Квантором общности по переменной x называется выражение «для любого x» (для всякого x, для каждого x) и обозначается $\forall x$ (английское слово All – все).

«$\forall x : G(x)$» – для любого x верно $G(x)$.

Квантором существования по переменной x называется выражение «существует x» (есть x, найдется x) и обозначается $\exists x$ (английское слово Existence – существование).

Из других кванторов можно указать квантор **единственности**, обозначаемый $\exists! x$ («для одного и только одного x»).

1.1.5. Числовые множества

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ – множество **натуральных** чисел.

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ – множество **целых** чисел.

$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \right\}$ – множество **рациональных** чисел.

$\mathbb{R}$ – множество **действительных (вещественных)** чисел.

При этом $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Каждое действительное число изображается точкой на координатной прямой (числовой оси) (рис. 1.1.7).

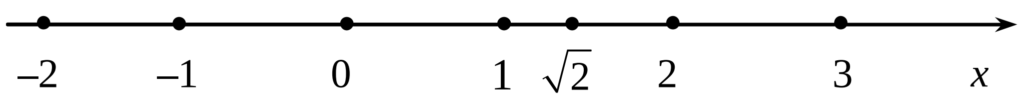


рис. 1.1.7

1.1.6. Подмножества множества $\mathbb{R}$ (интервалы)

Рассмотрим подмножества множества $\mathbb{R}$ (**интервалы**):

$(a, b) = \{x : a < x < b\}$ – открытый интервал | рис. 1.1.8,а;

$[a, b] = \{a \le x \le b\}$ – замкнутый интервал (отрезок) | рис. 1.1.8,б;

$$\left.\begin{array}{l}[a,b)=\{x:a\le x<b\}\\ (a,b]=\{x:a<x\le b\}\end{array}\right\}$$ – полуоткрытые интервалы | рис. 1.1.8,в; рис. 1.1.8, г.

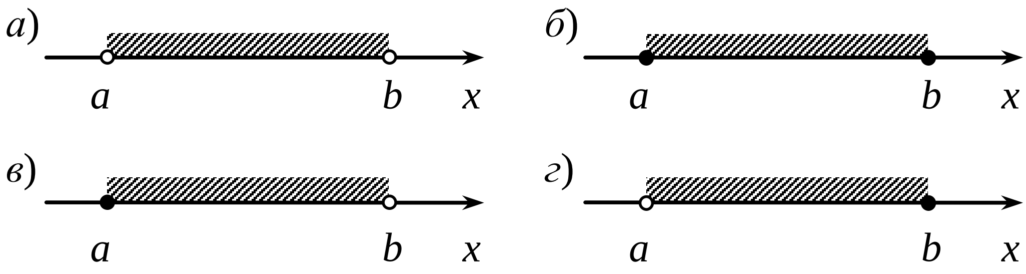


рис. 1.1.8

Неограниченные интервалы:

$(a,\infty)=\{x:x>a\}$ рис. 1.1.9,а; $[a,\infty)=\{x:x\ge a\}$ рис. 1.1.9,б;

$(-\infty,b)=\{x:x<b\}$ рис. 1.1.9,в; $(-\infty,b]=\{x:x\le b\}$ рис. 1.1.9,г.

$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)=\{x:-\infty<x<\infty\}$ – вся числовая ось (рис. 1.1.7).

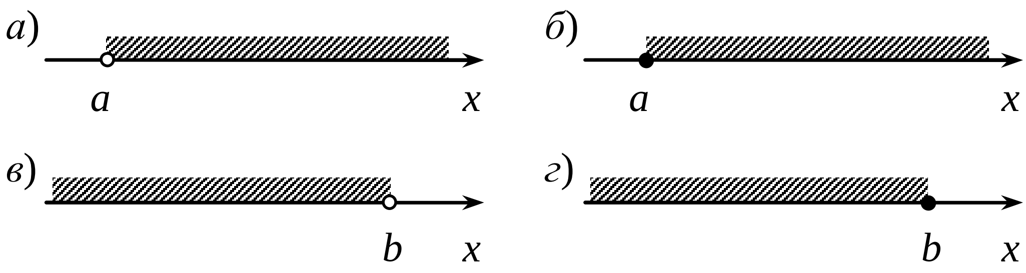


рис. 1.1.9

1.1.7. Окрестность точки

Окрестностью точки $a\in\mathbb{R}$ будем называть любой открытый интервал, содержащий точку a (рис. 1.1.10).

рис. 1.1.10

Наибольший интерес представляет симметричный интервал с центром в точке a.

***r*-окрестностью** точки $a\in\mathbb{R}$ будем называть симметричный открытый интервал длины $2r$ с центром в точке a (рис. 1.1.11). Величина r называется радиусом окрестности.

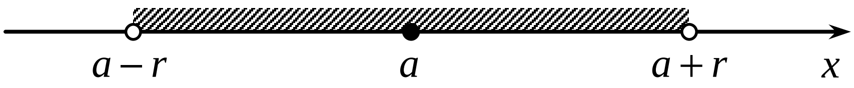


рис. 1.1.11

Обозначим r-окрестность точки a через U_a^r. Тогда аналитически она может быть описана в следующем виде: $U_a^r = \{x : |x-a| < r\}$.

Проколотой окрестностью $\dot{U}_a^r$ точки a называется ее окрестность, из которой удалена сама точка a (рис. 1.1.12).

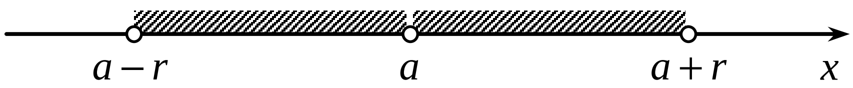


рис. 1.1.12

Таким образом, $\dot{U}_a^r = (a-r, a) \cup (a, a+r) = \{x : 0 < |x-a| < r\}$.

1.1.8. Понятие функции

Определение. Если каждому элементу x из множества D ставится в соответствие определенный элемент y из множества E. то говорят, что на множестве D задана **функция** $y = f(x)$.

Терминология: x – независимая переменная (аргумент), y – зависимая переменная (функция), D – область определения, E – область значений.

Если множество D не определено смыслом функции то область определения – это множество значений x, при которых функция $y = f(x)$ имеет смысл.

Значение функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется **частным значением** и обозначается

$$y = f(x_0),\ y|_{x=x_0},\quad f(x)|_{x=x_0}.$$

Способы задания функции: аналитический, табличный графический, словесный.

Графиком функции $y = f(x)$.называется множество точек $(x, f(x))$ на плоскости xOy, где $x \in D$.

Графиком функции является линия на плоскости, удовлетворяющая свойству: любая прямая, параллельная оси Oy пересекает кривую только в одной точке.

1.1.9. Элементарные функции, свойства функции

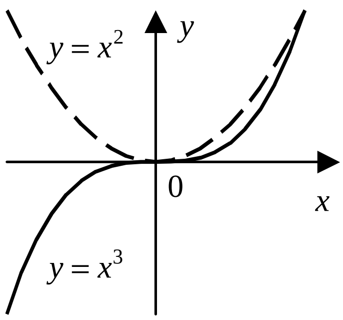
К **основным элементарным** функциям относятся:

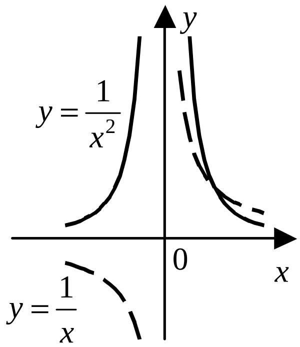
1) линейная функция $y = kx + b$ (рис. 1.1.13);

$D = E = (-\infty; \infty)$ $\quad$ $D = E = (-\infty; \infty)$

рис. 1.1.13

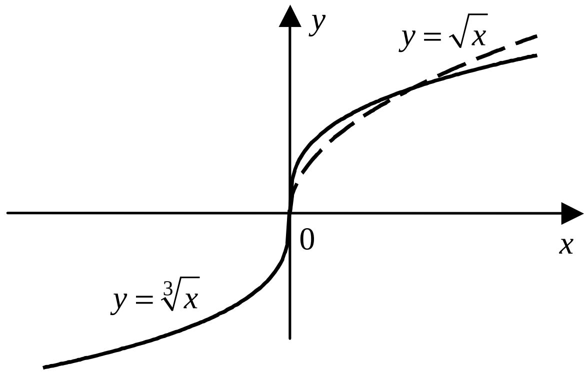
2) степенная функция $y = x^n$ (рис. 1.1.14);





$D = (-\infty; \infty)$;
$E = [0, \infty)$, если n – четное,
$E = (-\infty; \infty)$, если n – нечетное.

$D = (-\infty; 0) \cup (0, \infty)$;
$E = (0, \infty)$, если n – четное,
$E = (-\infty; 0) \cup (0, \infty)$, если n – нечетное.



$D=(-\infty;\infty)$, если n – нечетное; $D=[0,\infty)$, если n – четное,
$E=(-\infty;\infty)$, если n – нечетное; $E=[0,\infty)$, если n – четное.

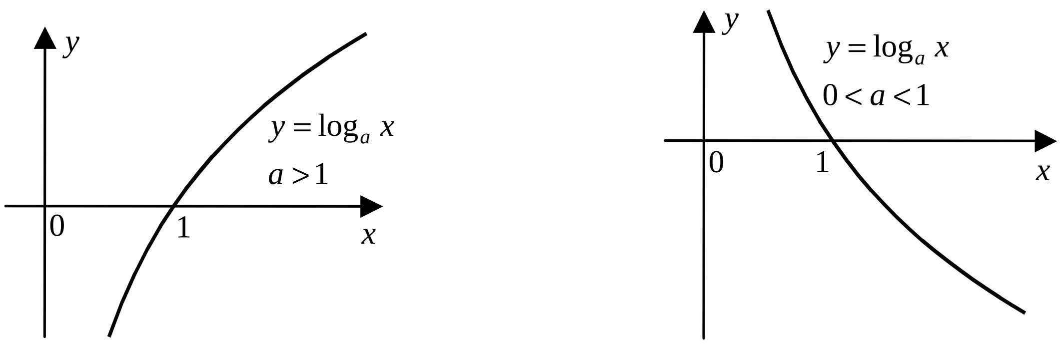
рис. 1.1.14

3) показательная функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ (рис. 1.1.15);

$D=(-\infty;\infty)$, $E=(0;\infty)$. $D=(-\infty;\infty)$, $E=(0;\infty)$.

рис. 1.1.15

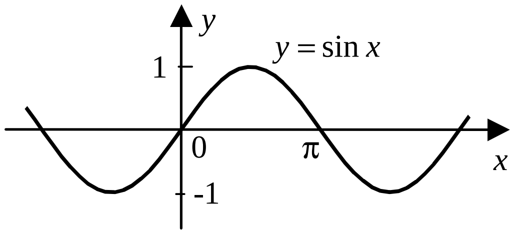
4) логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$ (рис. 1.1.16);



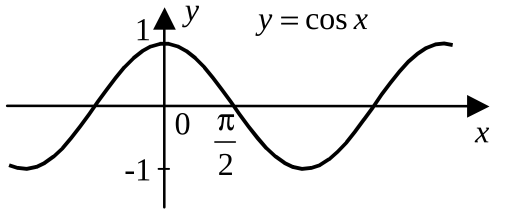
$D=(0;\infty)$, $E=(-\infty;\infty)$. $D=(0;\infty)$, $E=(-\infty;\infty)$.

рис. 1.1.16

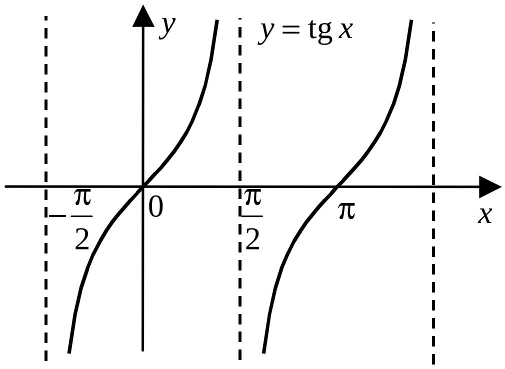
5) Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ (рис. 1.1.17);



$D=(-\infty;\infty)$, $E=[-1;1]$.

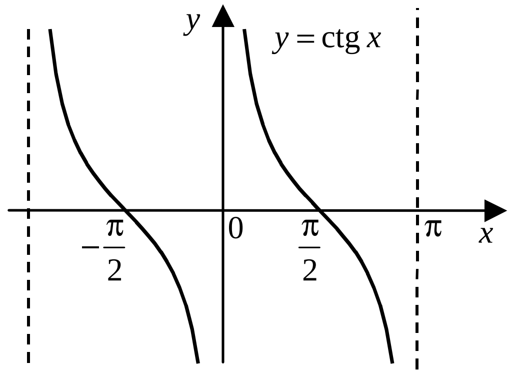


$D=(-\infty;\infty)$, $E=[-1;1]$.



$D=\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$,

$E=(-\infty;\infty)$, $n\in\mathbb{Z}$.

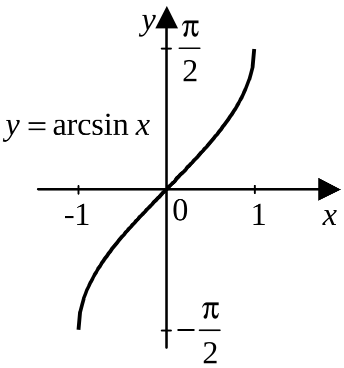


$D=(n\pi;\pi+n\pi)$,

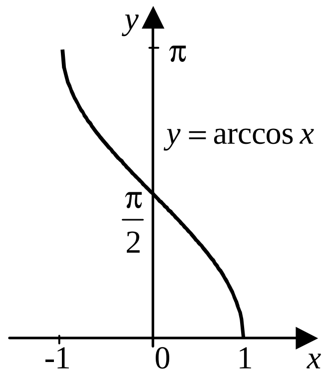
$E=(-\infty;\infty)$, $n\in\mathbb{Z}$.

рис. 1.1.17

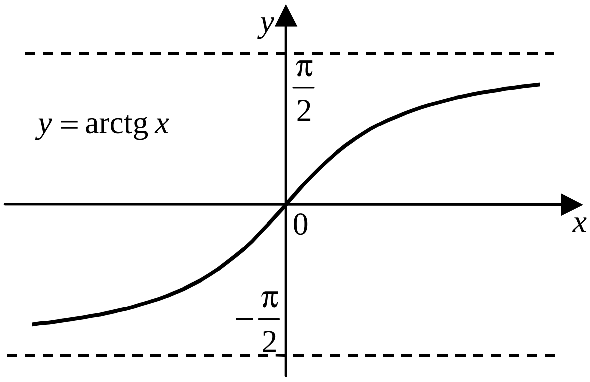
6) обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ (рис. 1.1.18).



$D=[-1;1]$, $E=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



$D=[-1;1]$, $E=[0;\pi]$.



$$D=(-\infty;\infty),\ E=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

РИС. 1.1.18

Элементарными функциями называются функции, полученные из основных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и операции образования сложной функции.

1.1.10. Четность, нечетность.

Функция $y=f(x)$ называется **четной**, если $f(-x)=f(x)$ и **нечетной**, если $f(-x)=-f(x)$ для любых значений x из области определения функции.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

1.2. Контрольные вопросы

1) Что называется множеством?
2) Что называется пересечением множеств?
3) Что называется объединением множеств?
4) Что называется разностью множеств?
5) Назовите виды числовых множеств?
6) Какие подмножества множества действительных чисел вы знаете?
7) Что такое окрестность точки?
8) Что называется функцией, областью определения функции, областью значений функции?
9) Какие функции называются основными элементарными функциями?
10) Дайте определение следующих свойств функции: четность, нечетность; периодичность, ограниченность, приведите примеры.
11) Что называется графиком функции?

Тема 2. Теория пределов

2.1. Вопросы для самостоятельного изучения

2.1.1. Числовая последовательность

Числовой последовательностью называется функция, которая определена на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел и обозначается $y_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Определенная таким образом функция каждому натуральному числу n ставит в соответствие действительное число y_n. Числовая последовательность записывается в виде: $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$, или кратко: y_n.

Числа $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ называются **членами** последовательности, y_n – **общим,** или ***n*-м членом** последовательности.

Примеры.

1. $y_n = \dfrac{1}{n+1}$, или y_n: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n+1}, ...$

2. $y_n = (-1)^n + 1$, или y_n: $0, 2, 0, 2, ...$

3. $y_1 = a_1$, $y_n = y_{n-1} + d$ – арифметическая прогрессия.

Числовая последовательность может быть задана формулой общего члена y_n (примеры 1, 2) или рекуррентной формулой (пример 3).

2.1.2. Предел числовой последовательности

Число a называется **пределом числовой последовательности** y_n, если для любого положительного числа ε существует номер N, после которого выполняется неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ (или $y_n \to a$ при $n \to \infty$).

В этом случае говорят, что последовательность y_n **сходится** к a, или имеет конечный предел. Последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся**. Последовательность, не имеющая конечного предела, называется **расходящейся**.

2.1.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией** при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что при всех $x > M$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией** при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $\dot{U}_a^r$ точки a, в которой выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых функций

1. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. $\Rightarrow$ $\alpha(x) \pm \beta(x)$ – б.м.ф.

2. $\alpha(x)$ – б.м.ф., $f(x)$ – ограниченная $\Rightarrow$ $\alpha(x) \cdot f(x)$ – б.м.ф.

3. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. $\Rightarrow$ $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ – б.м.ф.

4. $\alpha(x)$ – постоянная б.м.ф. $\Leftrightarrow$ $\alpha(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой функцией** при $x \to \infty$, если для любого числа $A > 0$ существует число $M > 0$ такое, что для всех $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x)| > A$.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой функцией** при $x \to a$, если для любого числа $A > 0$ существует проколотая окрестность $\dot{U}_a^r$ точки a, в которой выполняется неравенство $|f(x)| > A$.

Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной** на интервале, если существует число $C > 0$ такое, что для всех x из этого интервала выполняется неравенство $|f(x)| \le C$.

2.1.4. Предел функции

Число $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ называется **пределом функции** $f(x)$ **на бесконечности** ($x \to +\infty$), если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to +\infty$.

Число b называется **пределом функции** $f(x)$ **при** $x \to a$, если разность $f(x)-b$ является б.м.ф. при $x \to a$.

2.1.5. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть существует предел отношения б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ ($x \to \infty$).

Б.м.ф. $\alpha(x)$ называется б.м.ф. **более высокого порядка малости**, чем б.м.ф. $\beta(x)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется б.м.ф. **одного порядка малости**, если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, $C = \text{const} \neq 0$. В частности, если $C = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** б.м.ф.

2.1.6. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Замечание. Первый замечательный предел раскрывает неопределенность вида $\left(0/0\right)$. Из него вытекают следующие формулы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Замечание. Второй замечательный предел раскрывает неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$ и имеет еще другую форму:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Число e является иррациональным числом ($e \approx 2,718281...$).

Особую роль в математическом анализе имеют показательная и логарифмическая функции с основанием e, то есть $y = e^x$ и $y = \log_e x$.

Натуральным логарифмом числа x называется логарифм по основанию e. Обозначается: $\ln x = \log_e x$.

2.2. Контрольные вопросы

1) Что называется последовательностью?
2) Дать определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей.
3) Какая последовательность называется сходящейся, что называется пределом последовательности?
4) Дать определение предела функции на бесконечности.
5) Дать определение окрестности точки.
6) Дать определение предела функции в точке.
7) Сформулировать свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.
8) Запишите первый замечательный предел и его разновидности. Какую неопределенность раскрывает этот предел?
9) Запишите второй замечательный предел и его вторую форму. Какую неопределенность раскрывает этот предел?
10) Как определяется число e? Чему оно равно? Как называется и обозначается логарифм по основанию e?

Тема 3. Предел и непрерывность функции

3.1. Вопросы для самостоятельного изучения

3.1.1. Односторонние пределы

Левосторонний предел функции $f(x)$ (**предел слева**) обозначают:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x<a)}} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0).$$

Правосторонний предел функции $f(x)$ (**предел справа**) обозначают:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x>a)}} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0).$$

3.1.2. Необходимое и достаточное условие существования предела

Для того чтобы существовал $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, **необходимо и достаточно**, чтобы односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ существовали и были равны между собой:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x).$$

3.1.3. Непрерывность функции

Первое определение непрерывности функции в точке

Функция $y=f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если выполняется равенство:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Второе определение непрерывности функции в точке

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

Функция называется **непрерывной на интервале**, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

3.1.4. Точки разрыва и их классификация

Точки, в которых нарушено условие непрерывности функции, называются **точками разрыва функции**.

Устранимый разрыв

Точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва** функции $f(x)$, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, но $f(x_0)\neq b$ или $f(x_0)$ не существует.

Скачок

Точка x_0 называется **точкой скачка** функции $f(x)$, если односторонние пределы существуют, но не равны, то есть

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0).$$

Бесконечный разрыв

Точка x_0 называется **точкой бесконечного разрыва** функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

3.1.5. Свойства непрерывных функций

Свойства функций, непрерывных в точке

1) Символ непрерывной функции и символ предела можно менять местами, то есть:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$

2) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$ также непрерывны в точке x_0.

3) Всякая элементарная функция непрерывна в области ее определения.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a,b]$, если она непрерывна на интервале (a,b) и

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b-0} f(x)=f(b).$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то выполняются следующие свойства:

1) $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то есть

$$\exists C>0: \left|f(x)\right|\leq C, \forall x\in[a,b];$$

2) $f(x)$ принимает свои наибольшее M и наименьшее m значения на $[a,b]$;

3) $f(x)$ принимает все промежуточные значения μ между m и M, то есть существует такая точка $c\in[a,b]$, в которой $f(c)=\mu$.

Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 3.1.1.

1) График функции лежит в полосе $(-C, C)$.

2) Изображен случай, когда $f(x_1) = m$, $f(b) = M$.

3) $f(c) = \mu$, $m < \mu < M$.

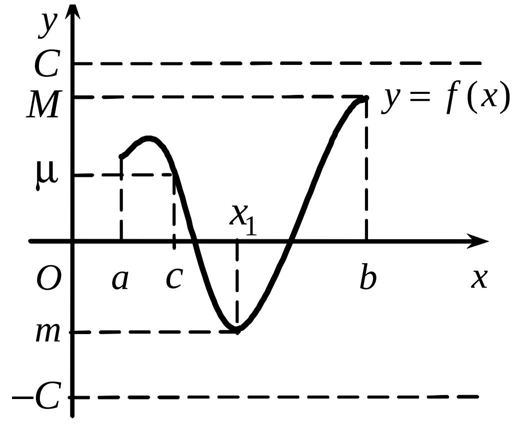


РИС. 3.1.1

3.2. Контрольные вопросы

1) Сформулируйте определение непрерывной в точке функции.
2) Сформулируйте второе определение непрерывной в точке функции.
3) Что называется пределом слева и справа функции $f(x)$ в точке x_0?
4) Сформулируйте необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке.
5) Что называется точкой разрыва функции?
6) Сформулируйте свойства непрерывных функций.
7) Сформулируйте свойства функции, непрерывной на отрезке.

3.3. Практическое задание для самостоятельной работы

Вычислить пределы.

1) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$ в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$

2) а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-7x+3}{2x^2+x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+2}{2x^2+x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$

3) а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2-x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-6x+8}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$

4) а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x\ -x^2-4}{x^2-2x-8}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$

5) а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$

6) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+1}{3x^2+4x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$

7) а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-6}{2x^2-x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

8) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3}{5x^2-4x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2+5x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-x+1}$

9) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{5x^2-7x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{1-x}$

10) а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-3x+9}{2x^2+2x+5}$ в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+8}\right)^{2x-3}$

РАЗДЕЛ. II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 4. Вычисление производных

4.1. Вопросы для самостоятельного изучения

4.1.1. Производная функции

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.

Обозначения производной: $y', y'_x, f'(x), \dfrac{dy}{dx}$.

Таким образом,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

4.1.2. Правило дифференцирования по шагам

1) найти $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$;
2) найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;
3) найти отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;
4) найти производную $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

4.1.3. Геометрический смысл производной.

Производная $f'(x_0)$ – это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$

$$f'(x_0) = k_{\text{кас}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

4.1.4. Правила и формулы дифференцирования

Правила дифференцирования. Если $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то имеют место формулы:

Производная постоянной равна нулю, то есть $C' = 0$;

$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

$(Cu)' = Cu'$, где C – постоянная;

$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, при условии, что $v \neq 0$.

4.1.5. Таблица производных:

1. $x' = 1$
2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
6. $\left(e^x\right)' = e^x$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

4.1.6. Производная сложной функции

Функция y называется **сложной** функцией переменной x, если $y = f(u),\ u = g(x)$.

Переменная u называется **промежуточной**, а x – **независимой**. Функции $y = f(u),\ u = g(x)$ называются **звеньями сложной функции**. Сложную функцию записывают в виде $y = f\left[g(x)\right]$.

Если $y = f(u),\ u = g(x)$ – дифференцируемые функции, то сложная функция $y = f\left[g(x)\right]$ также дифференцируема и

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (**правило цепочки**).

4.1.7. Логарифмическое дифференцирование

1) Функция $y = f(x)$ логарифмируется по основанию e

$$\ln y = \ln f(x);$$

2) находятся производные левой и правой частей полученного равенства по переменной x с учетом того, что y – это функция x

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(\ln f(x)\right)';$$

3) из последнего равенства выражается производная y'

$$y' = y \cdot \left(\ln f(x)\right)' = f(x) \cdot \left(\ln f(x)\right)'.$$

Выражение $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$ называют **логарифмической производной**.

4.1.8. Производные высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Ее производная y' также является функцией переменной x. Следовательно, ее также можно дифференцировать, то есть находить производную $\left(y'\right)'$. Эта производная называется **второй производной** и обозначается y'', $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Итак,

$$y'' = \left(y'\right)'.$$

Вторая производная y'' называется также **производной второго порядка**, а производная y' – **первой производной** или **производной первого порядка**.

Аналогично, производная от второй производной $(y'')'$ называется **третьей производной** или **производной третьего порядка** $y''' = (y'')'$ и обозначается также $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

В общем случае, **производная *n*-го порядка** – это производная от производной $(n-1)$-го порядка

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

4.1.9. Дифференциал функции, его свойства

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной на приращение независимой переменной и обозначается dy.

Таким образом, $dy = f'(x)\cdot \Delta x$.

Дифференциал $dy = f'(x)\cdot \Delta x$ является главной частью приращения функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Так как для независимой переменной x имеем

$$dx = x'\cdot \Delta x = 1\cdot \Delta x = \Delta x,$$

то дифференциал можно записать в другой форме

$$dy = f'(x)dx,$$

которая называется **второй формой дифференциала**.

Свойства дифференциала

1. Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедливы формулы:

$$d(Cu) = Cdu; \qquad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(u,v) = vdu + udv; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Приложение дифференциала

Приближенное значение функции $y = f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ находится, исходя из равенства $\Delta y \approx dy$, по формуле

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

4.2. Контрольные вопросы

1) Сформулируйте определение производной функции в точке.
2) В чем заключается правило дифференцирования по шагам?
3) В чем состоит физический смысл производной?
4) В чем состоит геометрический смысл производной?
5) Запишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$.
6) Сформулируйте определение сложной функции.
7) Запишите формулу производной сложной функции, состоящей:
8) а) из двух звеньев, б) из трех звеньев.
9) В чем состоит метод логарифмического дифференцирования?
10) Что называется производной второго порядка и как она обозначается?
11) Что называется производной n-го порядка?
12) В чем состоит механический смысл производной второго порядка?
13) Дайте определение дифференциала функции.
14) По какой формуле находится приближенное значение функции?
15) В чем состоит правило Лопиталя вычисления пределов и какие неопределенности оно раскрывает?

4.3. Практическое задание для самостоятельной работы

Задание содержит 6 задач. Каждая задача имеется в 35 вариантах. Номер задачи состоит из двух чисел: первое число – порядковый номер задачи, второе число – номер варианта.

Студент решает ту задачу, номер варианта которой совпадает с его номером по списку в журнале, подставляя значение параметра $k = 1, 2, 3, \ldots$ – сумма последних двух цифр номера группы.

Задача 1.

Найти y' и значение $y'(x_0)$ функции $y = y(x)$ в точке $x_0 = 1$.

Варианты

1.1. $y = \frac{k}{2}x^4 + 3x^{-k-2} + \sqrt[k+1]{x^3} + 4$;

1.2. $y = \frac{x^k}{3} + \frac{1}{kx^3} + \sqrt[3]{x^{k+1}} + \frac{1}{2}$;

1.3. $y = \frac{1}{k}x^k + 7x^{-k-5} + \sqrt{x^{-k}} + 1$;

1.4. $y = \frac{7}{k}x^k - \frac{2}{x^k} + \sqrt[k+2]{x^{k+1}} + 2$;

1.5. $y = \frac{k+2}{k}x^5 - \frac{1}{kx^k} + \sqrt[3]{x^2} + 2$;

1.6. $y = \frac{k^2}{3}x^{-k} + \frac{1}{2}x^{k+1} + \sqrt[3]{x^{-4}} + 7$;

1.7. $y = \frac{1}{3}x^{-k-3} + kx^2 + \sqrt[k+1]{x^7} + 1$;

1.8. $y = \frac{3}{5}x^{k+1} + \frac{1}{kx^{k+2}} + \sqrt[k+1]{x^3} + 2$;

1.9. $y = k^2x^5 - \frac{7k}{x^{k+1}} - \sqrt[k+1]{x^3} + 3$;

1.10. $y = \frac{2}{5}x^{k+2} - \frac{5}{x^{k+2}} + 3\sqrt[3]{x^{-k-2}} + 1$;

1.11. $y = \frac{k}{3}x^5 - 2x^{-k} + \sqrt[k+2]{x^7} + 3$;

1.12. $y = \frac{x^k}{2} + \frac{1}{kx^3} + \sqrt[3]{x^{k+2}} + \frac{1}{4}$;

1.13. $y = \frac{1}{k^2}x^3 + 5x^{-k-2} + \sqrt{x^{-k}} + 2$;

1.14. $y = \frac{1}{k}x^3 - \frac{1}{3x^k} + \sqrt[k+1]{x^4} + 3$;

1.15. $y = \frac{k^2}{4}x^{-k} + x^{k+2} + \sqrt[4]{x^{-k}} + 5$;

1.16. $y = x^{-k} + 4x^{k+3} + \sqrt[k+1]{x^5} - 2$;

1.17. $y = \frac{1}{4}x^{k+1} - \frac{2}{x^{k+1}} + \sqrt[k+3]{x^k} - 7$;

1.18. $y = \frac{1}{4}x^k + \frac{1}{3x^{k+1}} + \sqrt[k+2]{x^5} - 3$;

1.19. $y = \frac{3}{2}x^{k+3} - \frac{8}{x^{k+1}} + 7\sqrt[3]{x^{-k}} - 5$;

1.20. $y = x^{3k} - 7x^{-k-3} + \sqrt[k+1]{x^8} + 2$;

1.21. $y = \frac{x^k}{3} + \frac{1}{(k+2)x^4} + \sqrt[4]{x^k} - 1$;

1.22. $y = \frac{1}{5}x^{k+5} + 5x^{-k} + \sqrt{x^{-k}} + 3$;

1.23. $y = \frac{k+1}{k+3}x^3 - \frac{1}{kx^k} + \sqrt[k]{x^3} + 4$;

1.24. $y = \frac{k^2}{2}x^{-k} + \frac{1}{3}x^k + \sqrt[3]{x^{-k}} + 2$;

1.25. $y = \frac{1}{7}x^{-k-1} + kx^k + \sqrt[k]{x^6} - 1$;

1.26. $y = \frac{5}{3}x^{k+2} - \frac{3}{x^{k+1}} + \sqrt[k+4]{x^k} + 3$;

1.27. $y = \frac{4}{1}x^{k+2} + \frac{1}{kx^3} + \sqrt[k]{x^5} - 1$;

1.28. $y = k^2x^{k+2} - \frac{5k}{x^{k+2}} - 3\sqrt[k+1]{x^k} + 3$;

1.29. $y = \frac{3}{2}x^k - \frac{8}{x^{k+1}} + 4\sqrt[7]{x^{-k}} + 2$;

1.30. $y = \frac{k+2}{4}x^4 - 3x^{-k} + \sqrt[k]{x^6} - 1$;

1.31. $y = \frac{x^{k+2}}{3} + \frac{1}{kx^5} + \sqrt[4]{x^{k+1}} + 2$;

1.32. $y = \frac{1}{k^2}x^k - 2x^{-k-1} + \sqrt{x^{-k}} - 7$;

1.33. $y=\frac{2}{3}x^{4k}-\frac{1}{kx^k}+\sqrt[k+3]{x^4}-7$;

1.34. $y=\frac{k}{3}x^{-k}-\frac{2}{7}x^{k+1}+\sqrt[4]{x^{-k}}+1$;

1.35. $y=x^{k+2}-\frac{1}{kx}+\sqrt[k]{x}-1$.

Задача 2.

Найти производную произведения функций.

Варианты

2.1. $y=\left(x^k-k\operatorname{tg}x\right)\cdot\log_3 x$;

2.2. $y=ke^x\left(1-kx+\cos x\right)$;

2.3. $y=\left(k-3\ln x+\frac{1}{k}e^x\right)\cdot\operatorname{ctg}x$;

2.4. $y=(k+1)^x\left(1-k\sin x+k\sqrt{x}\right)$;

2.5. $y=\left(k-\frac{k}{x}+\ln x\right)\cdot\operatorname{ctg}x$;

2.6. $y=\frac{k}{x}\left(k\operatorname{tg}x-2\ln x+k^2\right)$;

2.7. $y=\left(kx^2-2e^x+k^3\right)\cdot\operatorname{ctg}x$;

2.8. $y=\left(x^k-k\operatorname{ctg}x\right)\cdot\log_{k+1}x$;

2.9. $y=\log_{k+1}x\left(1-k\operatorname{tg}x+3e^x\right)$;

2.10. $y=\left(x^k+k\operatorname{ctg}x\right)\cdot\log_4 x$;

2.11. $y=ke^x\left(1-kx^{k+2}+2\sin x\right)$;

2.12. $y=\left(x^k-2\sqrt{x}+\sin x\right)\cdot e^x$;

2.13. $y=\left(2-\frac{k}{2x}+\log_3 x\right)\cdot\operatorname{tg}x$;

2.14. $y=\left(\frac{k}{2}x^2+3e^x-k^2\right)\cdot\operatorname{tg}x$;

2.15. $(k+1)^x\left(1+\frac{1}{k}\operatorname{tg}x-\frac{k}{2}\sqrt{x}\right)$;

2.16. $y=\ln x\left(2+\frac{2}{k}\operatorname{ctg}x+2e^x\right)$;

2.17. $y=(k+1)^x\left(k\operatorname{tg}x-2\sqrt[3]{x}\right)$;

2.18. $y=\cos x\left(k^2+ke^x+2\ln x\right)$;

2.19. $y=\left(x^{k+1}+3\sqrt{x}-\cos x\right)e^x$;

2.20. $y=\left(4-k\ln x+(k+1)^x\right)\cdot\operatorname{tg}x$;

2.21. $y=\cos x\left(k-ke^x+\frac{1}{k}\ln x\right)$;

2.22. $y=\left(k\sqrt{x}+k^2\sin x+1\right)\cdot\log_3 x$;

2.23. $y=4^x\left(3-k\cos x+3\sqrt{x}\right)$;

2.24. $y=\left(k-\frac{k+1}{x}+\log_{k+2}x\right)\cdot\operatorname{tg}x$;

2.25. $y=\sin x\left(k-k^2e^x+\log_2 x\right)$;

2.26. $y=\left(\sqrt{x}+k^3\cos x+1\right)\cdot\log_3 x$;

2.27. $y=\frac{k}{x}\left(5\operatorname{ctg}x-k\log_5 x-1\right)$;

2.28. $y=\log_{k+1}x\left(k-2\operatorname{ctg}x+7^x\right)$;

2.29. $y=(k+1)e^x\left(k+3x-\sin x\right)$;

2.30. $y=\left(2-k\log_3 x-\frac{1}{k}e^x\right)\cdot\operatorname{tg}x$;

2.31. $y=\sin x\left(k-ke^x+\frac{1}{k}\ln x\right)$;

2.32. $y=\left(k\sqrt[3]{x}+k^2\cos x-2\right)\cdot\ln x$;

2.33. $y=\frac{k}{x}\left(k\operatorname{ctg}x-3\log_{k+2}x-k^2\right)$; **2.34.** $y=\left(x^k+k\operatorname{tg}x\right)\cdot\log_{k+1}x$;

2.35. $y=(k+2)e^x\left(3+kx^{k+3}-3\cos x\right)$.

Задача 3.

Найти производную частного функций.

Варианты

3.1. $y=\frac{kx^2-\log_{k+1}x}{\sin x+2}$;

3.2. $y=\frac{k^2e^x-1}{\operatorname{tg}x}$;

3.3. $y=\frac{k\cos x+\sqrt{x}-1}{e^x}$;

3.4. $y=\frac{(k+1)^x+k\sin x}{\ln x}$;

3.5. $y=\frac{k^2\log_{k+2}x-2x+k}{\cos x}$;

3.6. $y=\frac{k\sin x+x^k}{\log_{k+2}x}$;

3.7. $y=\frac{k\ln x+x^2}{\sin x}$;

3.8. $y=\frac{k^2e^x+\log_{k+1}x}{\operatorname{tg}x}$;

3.9. $y=\frac{(k+1)^x-kx+\sin x}{\log_{k+1}x}$;

3.10. $y=\frac{k\operatorname{tg}x-x^k-k}{2\cos x}$;

3.11. $y=\frac{k\log_{k+1}x-k^2}{x^k+2}$;

3.12. $y=\frac{2k\cos x-\log_{k+1}x}{k^2+\operatorname{tg}x}$;

3.13. $y=\frac{(k+1)^x-\sqrt{x}+k^2}{\log_{k+1}x}$;

3.14. $y=\frac{3-ke^x+2\sin x}{(k+1)^x-1}$;

3.15. $y=\frac{(k+2)^x-ke^x}{\operatorname{ctg}x}$;

3.16. $y=\frac{k\operatorname{tg}x-(k+1)^x}{\cos x+k}$;

3.17. $y=\frac{ke^x-\sin x-kx^2}{\log_{k+1}x}$;

3.18. $y=\frac{2k-(k+1)^x+2\operatorname{tg}x}{x^k-1}$;

3.19. $y=\frac{k\ln x-x^k}{\operatorname{ctg}x-k^2}$;

3.20. $y=\frac{k\cos x-3\sqrt{x}-k}{2\sin x-(k+1)^x}$;

3.21. $y=\frac{kx^3+\ln x}{2\cos x-1}$;

3.22. $y=\frac{k^2e^x-2}{\operatorname{ctg}x}$;

3.23. $y=\frac{-k\sin x+\sqrt{x}+1}{e^x}$;

3.24. $y=\frac{(k+2)^x-k\cos x}{\log_{k+2}x}$;

3.25. $y=\frac{k^2\log_{k+1}x+3x-k}{\sin x}$;

3.26. $y=\frac{x^k-k\cos x}{\ln x}$;

3.27. $y=\dfrac{k\log_{k+2}x-2x}{\cos x}$;

3.28. $y=\dfrac{\log_{k+1}x-k^2e^x}{\operatorname{ctg}x}$;

3.29. $y=\dfrac{\cos x+kx-(k+1)^x}{\ln x+k}$;

3.30. $y=\dfrac{k+1-x^k+k\operatorname{ctg}x}{\sin x}$;

3.31. $y=\dfrac{2k^2-3\log_{k+2}x}{x^k-3}$;

3.32. $y=\dfrac{2\log_{k+2}x+k\sin x}{\operatorname{ctg}x-k^2}$;

3.33. $y=\dfrac{k^3+\sqrt{x}-(k+1)^x}{\ln x}$;

3.34. $y=\dfrac{2+ke^x-3\cos x}{(k+2)^x+2}$;

3.35. $y=\dfrac{e^x+kx^{k+2}}{\operatorname{tg}x}$.

Задача 4.

Найти производную сложной функции.

Варианты

4.1. $y=\arcsin kx+k\cos\ln x$;

4.2. $y=\cos^{k+1}x-\ln\left(e^x+k\right)$;

4.3. $y=\operatorname{arctg}^{k+1}x+\sin(kx+1)$;

4.4. $y=e^{kx}-k\operatorname{tg}\ln x$;

4.5. $y=k\arccos\dfrac{1}{x}-(\sin x+k)^3$;

4.6. $y=\sqrt{\cos x}-\operatorname{arctg}\left(ke^x\right)$;

4.7. $y=e^{k\ln x+1}-\arcsin kx$;

4.8. $y=\ln(\cos x+k)-\operatorname{arcctg}^{k+1}x$;

4.9. $y=\left(\log_{k+1}x+1\right)^2-e^{k\operatorname{tg}x}$;

4.10. $y=\sqrt{1+\operatorname{arctg}x}-e^{k\cos x}$;

4.11. $y=\arcsin^{k+2}x-k\operatorname{tg}\left(e^x\right)$;

4.12. $y=\ln\left(k\operatorname{tg}x+k^2\right)-\cos^{k+1}x$;

4.13. $y=(k+1)^{\sin x}-\ln\left(k+x^2\right)$;

4.14. $y=\left(k^3+\operatorname{tg}x\right)^3-e^{k\arcsin x}$;

4.15. $y=(2k)^{\operatorname{tg}x}-\ln\left(1-x^k\right)$;

4.16. $y=\operatorname{arctg}(-kx)+k^2\operatorname{tg}e^x$;

4.17. $y=\operatorname{ctg}^{k+3}x-e^{k\operatorname{arctg}x}$;

4.18. $y=\left(1-x^k\right)^3-\arcsin\left(ke^x\right)$;

4.19. $y=\sqrt{\operatorname{tg}x}+\operatorname{arctg}\left(e^{kx}\right)$;

4.20. $y=(k+\sin x)^3-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}$;

4.21. $y=k\ln\operatorname{tg}x-e^{2kx}$;

4.22. $y=\arccos 3kx-k\sin\ln x$;

4.23. $y=(\ln x-k)^3+e^{k\operatorname{ctg}x}$;

4.24. $y=\sin^{k+1}x+\log_{k+1}\left(ke^x\right)$;

4.25. $y=\left(x^k-2\right)^3+e^{k\arcsin x}$;

4.26. $y=\operatorname{arcctg}^{k+1}x-\cos(2-kx)$;

4.27. $y=\sqrt{1-\operatorname{arcctg}x}+e^{k\sin x}$;

4.28. $y=k\arcsin\dfrac{1}{x}-(\sin x-2)^2$;

4.29. $y=\arccos^{k+1}x+k\operatorname{ctg}\left(e^{x}\right)$;

4.30. $y=(3k)^{\operatorname{ctg}x}+\log_{k+2}\left(x^{k}+1\right)$;

4.31. $y=\left(\operatorname{ctg}x-k^{2}\right)^{3}+e^{k\arccos x}$;

4.32. $y=\operatorname{tg}^{2k}x+e^{k\arcsin x}$;

4.33. $y=\operatorname{arcctg}3kx-k^{3}\sin e^{x}$;

4.34. $y=(k-\cos x)^{2}+\sqrt{\operatorname{ctg}x-2}$;

4.35. $y=(1+\operatorname{arctg}x)^{k+1}-k\log_{k+1}(\sin x)$

.

Задача 5.

Найти производную сложной функции.

Варианты

5.1. $y=\sqrt{\operatorname{tg}\left(k+e^{x}\right)}$;

5.2. $y=\sqrt{\operatorname{ctg}\left(e^{kx}\right)}$;

5.3. $y=\operatorname{arctg}^{k+1}(\sin x+1)$;

5.4. $y=\operatorname{tg}(k-\ln\sin x)$;

5.5. $y=e^{k\operatorname{tg}(kx)}$;

5.6. $y=\sin^{k+1}(kx+1)$;

5.7. $y=\operatorname{tg}\sqrt{k-e^{kx}}$;

5.8. $y=\left(k+e^{\operatorname{arctg}x}\right)^{k+1}$;

5.9. $y=\cos^{3}(1-\ln kx)$;

5.10. $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt[k+1]{x}$;

5.11. $y=(k+2)^{\sin 2kx}$;

5.12. $y=\cos\left(k-\sqrt{\ln x}\right)$;

5.13. $y=2^{\operatorname{arctg}3kx}$;

5.14. $y=\sin^{k+2}(\ln x+1)$;

5.15. $y=\ln\left(1+e^{2kx}\right)$;

5.16. $y=\sqrt[k+1]{1-\operatorname{tg}(1+kx)}$;

5.17. $y=\operatorname{arcctg}^{k+1}\sqrt{x}$;

5.18. $y=\ln\left(k+e^{\sin x}\right)$;

5.19. $y=\ln\arccos(kx)$;

5.20. $y=e^{\sin^{k+1}x}$;

5.21. $y=\arcsin^{2}\left(k+e^{x}\right)$;

5.22. $y=\arcsin^{k+1}(\operatorname{tg}x-1)$;

5.23. $y=\sin(k+\ln\operatorname{tg}x)$;

5.24. $y=\ln\operatorname{arctg}\left(e^{x}-k\right)$;

5.25. $y=e^{k\operatorname{ctg}(kx)}$;

5.26. $y=\operatorname{tg}^{k+2}(2-kx)$;

5.27. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{e^{kx}+k}$;

5.28. $y=\left(5k-e^{\arcsin x}\right)^{k+1}$;

5.29. $y=\operatorname{tg}^{2}\left(2-\log_{k+2}(x-2)\right)$;

5.30. $y=\ln\arcsin\sqrt[k+1]{x}$;

5.31. $y=(k+2)^{\cos kx}$;

5.32. $y=\operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{\ln x}+k\right)$;

5.33. $y=3^{\arcsin 2kx}$;

5.34. $y=\operatorname{tg}^{k+1}\left(\log_{k+2}x-2\right)$;

5.35. $y=\log_{k+1}\left(1-e^{kx}\right)$.

Задача 6.

Найти уравнения нормали и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Варианты

6.1. $f(x) = kx^3 - x^2 + k,$ $x_0 = -1;$

6.2. $f(x) = 2k - x^4 + kx,$ $x_0 = 1;$

6.3. $f(x) = 2x - kx^2 + x^3,$ $x_0 = 2;$

6.4. $f(x) = kx^3 - kx + 4,$ $x_0 = 0;$

6.5. $f(x) = x^4 - kx^2 + 3,$ $x_0 = -1;$

6.6. $f(x) = k + kx - x^3,$ $x_0 = -1;$

6.7. $f(x) = 2x^2 - kx + x^3,$ $x_0 = 2;$

6.8. $f(x) = k^2 - kx^3 - x^4,$ $x_0 = 1;$

6.9. $f(x) = kx - x^3 + 2k,$ $x_0 = 0;$

6.10. $f(x) = (k+2)x^2 - 3k + x^4,$ $x_0 = -1;$

6.11. $f(x) = \frac{k}{2}x - x^3 + k^3,$ $x_0 = 1;$

6.12 $f(x) = \frac{k}{2}x - k^2 + x^3,$ $x_0 = 2;$

6.13. $f(x) = 3 - kx + k^2x^3,$ $x_0 = 0;$

6.14. $f(x) = (2-k)x^2 + x^3 - 3k,$ $x_0 = -2;$

6.15. $f(x) = 3kx^2 - k^3 + 2k,$ $x_0 = 1;$

6.16. $f(x) = x^4 - kx^3 + k^2,$ $x_0 = 1;$

6.17. $f(x) = kx - k^2x^4 + 3,$ $x_0 = -1;$

6.18. $f(x) = 2kx^2 - kx^3 + 3,$ $x_0 = -1;$

6.19. $f(x) = 7 - kx^2 - kx^3,$ $x_0 = 2;$

6.20. $f(x) = (1-k)x^3 - k^2x^2 + 1,$ $x_0 = 2;$

6.21. $f(x) = k^2x^3 + x^2 - 1,$ $x_0 = 1;$

6.22. $f(x) = 3k + 2x^3 - kx,$ $x_0 = -1;$

6.23. $f(x) = kx^2 - 2x + x^3,$ $x_0 = -2;$

6.24. $f(x) = -kx^3 + 2kx - 1,$ $x_0 = 1;$

6.25. $f(x) = x^4 + kx^3 + 2x,$ $x_0 = -1;$

6.26. $f(x) = k - kx + x^2,$ $x_0 = 1;$

6.27. $f(x)=3x^2+kx-x^3$,
$x_0=-2$;

6.28. $f(x)=k^2+kx^3-x^4$,
$x_0=-1$;

6.29. $f(x)=x^3-kx-k$,
$x_0=0$;

6.30. $f(x)=(k+1)x^2-2k+3x^3$,
$x_0=1$;

6.31. $f(x)=\frac{k}{2}x+x^2-2k$,
$x_0=-1$;

6.32. $f(x)=(2-k)x^2-kx+3$,
$x_0=-2$;

6.33. $f(x)=2+kx-kx^2$,
$x_0=1$;

6.34. $f(x)=2kx^2+k^3-3x$,
$x_0=-1$;

6.35. $f(x)=x^4+kx-2k$,
$x_0=0$.

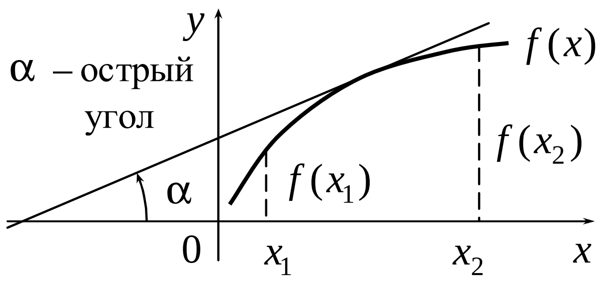
Тема 5. Исследование функций на экстремумы и интервалы монотонности

5.1. Вопросы для самостоятельного изучения

5.1.1. Условия возрастания и убывания функции

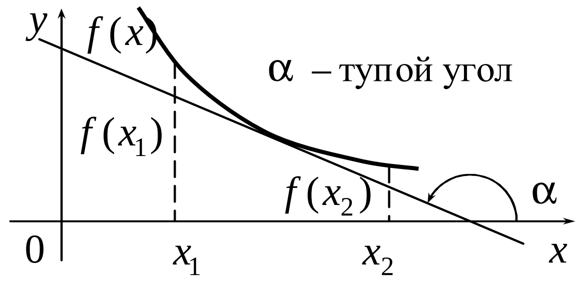
Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** на интервале (a,b), если большему значению аргумента $x_2>x_1$, $x_1,x_2\in(a,b)$ соответствует большее значение функции $f(x_2)>f(x_1)$ (Рис. 5.1.1).

Функция $y=f(x)$ называется **убывающей** на интервале (a,b), если большему значению аргумента $x_2>x_1$, $x_1,x_2\in(a,b)$ соответствует меньшее значение функции $f(x_2)<f(x_1)$ (Рис. 5.1.2).



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Рис. 5.1.1



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Рис. 5.1.2

Достаточное условие возрастания. Если $f'(x) > 0$ при $x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале (a,b).

Достаточное условие убывания. Если $f'(x) < 0$ при $x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ убывает на интервале (a,b).

Геометрический смысл достаточных условий. Так как $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, α – угол между касательной к графику $f(x)$ и осью Ox, то:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \text{ – острый;}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \alpha \text{ – тупой.}$$

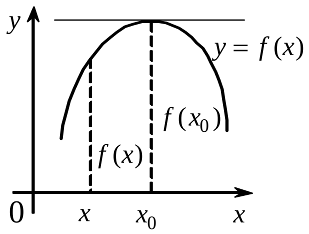
Вывод: если на некотором интервале угол α между касательной к графику $f(x)$ и осью Ox острый, то функция $f(x)$ является возрастающей на этом интервале (Рис. 5.1.1), если тупой – то убывающей (Рис. 5.1.2).

Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными.**

5.1.2. Точки экстремума функции, необходимое условие экстремума

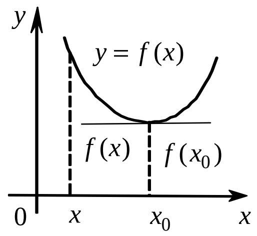
1. Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ (Рис. 5.1.3).

2. Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$ (Рис. 5.1.4).



$f(x_0) > f(x)$

Рис. 5.1.3



$f(x_0) < f(x)$

Рис. 5.1.4

Значение функции $f(x_0)$ в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции и обозначается $\max f(x)$ $(\min f(x))$.

Точки максимума и минимума называются точками **экстремума** функции $f(x)$, а значение функции в них называется экстремумом функции $\operatorname{extr} f(x)$.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Замечание 1. Данное необходимое условие не является достаточным. То есть, из условия $f'(x_0) = 0$ **не следует**, что x_0 – точка экстремума функции. Например, функция $f(x) = x^3$ имеет производную $f'(x) = 3x^2$. При $x = 0$, $f'(0) = 0$. Но точка $x = 0$, как видно из графика функции $f(x)$ (Рис. 5.1.5) не является точкой экстремума.

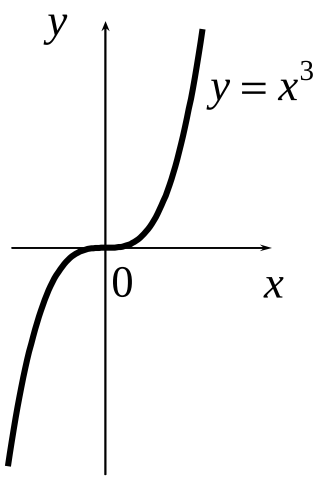
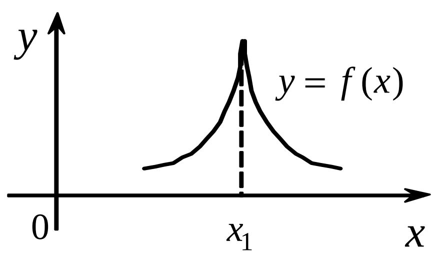
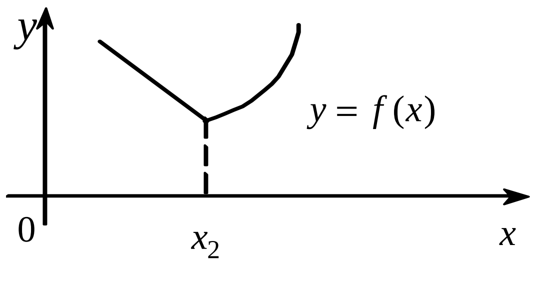


Рис. 5.1.5

Замечание 2. Функция $f(x)$ может принимать экстремальное значение в точках, где $f'(x)$ не существует (Рис. 5.1.6, Рис. 5.1.7).



$f'(x_1) = \infty$



$f'(x_2)$ – не существует

Рис. 5.1.6 **Рис. 5.1.7**

Такие экстремальные точки называются точками **острого экстремума** (в отличие от точек **гладкого экстремума**, где $f'(x)=0$).

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0)$ равна нулю или не существует.

Определение. Точка x_0, в которой $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, называется **критической точкой** функции $f(x)$.

5.1.3. Первый достаточный признак экстремума функции

Если x_0 – критическая точка функции $f(x)$ и производная $f'(x)$ при переходе аргумента через эту точку меняет знак, то x_0 – точка экстремума функции $f(x)$.

Причем, если при переходе слева направо знак меняется с плюса на минус, то x_0 – точка максимума, если с минуса на плюс, то точка минимума.

5.1.4. Схема исследования функции на возрастание, убывание и экстремумы

1. Найти область определения D_y функции $f(x)$.

2. Найти $f'(x)$, найти критические точки, решив уравнение $f'(x)=0$ и выделив точки, где $f'(x)$ не существует.

3. Разбить область определения на интервалы критическими точками и точками разрыва функции и определить знак производной в каждом из них. Сделать вывод: по знаку производной определить интервалы монотонности и точки экстремума.

4. Найти экстремумы функции.

5.1.5. Второй достаточный признак экстремума функции

Если точка $x=x_0$ – критическая точка дифференцируемой функции $f(x)$ и $f''(x_0)\neq 0$, то x_0 – точка экстремума функции $f(x)$.

Причем,

если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума,

если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума.

5.1.6. Второй способ исследования функции на экстремум

1. Найти область определения D_y функции.

2. Найти $f'(x)$, решить уравнение $f'(x) = 0$. Найти критические точки.

3. Найти $f''(x)$ и её значения в критических точках, сделать вывод о наличии точек экстремума.

4. Найти экстремумы функции.

5.1.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Задача. Дана непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$. Требуется найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $f(x)$ на этом отрезке.

Решение. Из чертежа (Рис. 5.1.8) видно, что наибольшее и наименьшее значения функция принимает либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

Отсюда вытекает **схема** решения задачи:

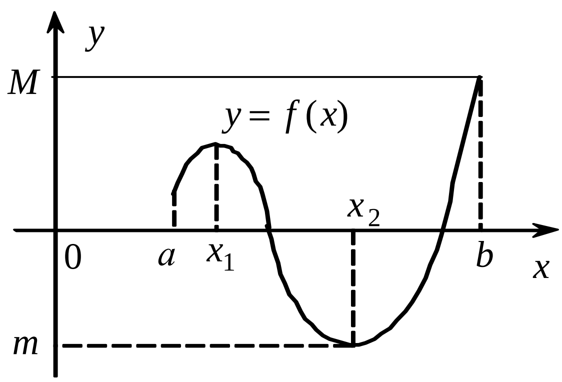


Рис. 5.1.8

1. Найти y', решить уравнение $y' = 0$, найти критические точки, лежащие внутри отрезка $[a, b]$.

2. Найти значение функции в этих точках и на концах отрезка.

3. Выделить среди этих значений наибольшее и наименьшее.

5.1.8. Выпуклость, вогнутость графика функции

1) График функции $f(x)$ называется **выпуклым** на интервале (a,b), если он лежит **под** касательной, проведенной к графику в любой точке интервала (a,b) (рис. 5.1.9).

2) График функции $f(x)$ называется **вогнутым** на интервале (a,b), если он лежит **над** касательной, проведенной к графику в любой точке интервала (a,b) (рис. 5.1.10).

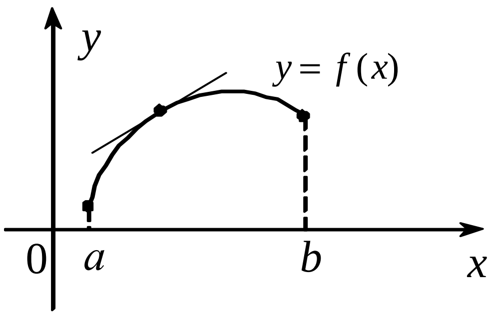


рис. 5.1.9

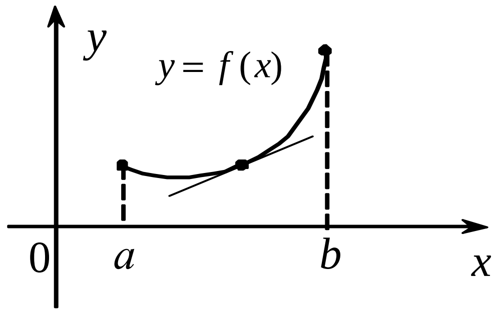


рис. 5.1.10

Достаточное условие выпуклости, вогнутости графика функции

1) Если $f''(x)<0$ на (a,b), то график функции $f(x)$ выпуклый на (a,b);

2) Если $f''(x)>0$ на (a,b), то график функции $f(x)$ вогнутый на (a,b).

5.1.9. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условие перегиба.

Определение. Точка $M(x_0,y_0)$, лежащая на графике функции, называется **точкой перегиба**, если она разделяет выпуклую и вогнутую части графика (Рис. 5.1.11).

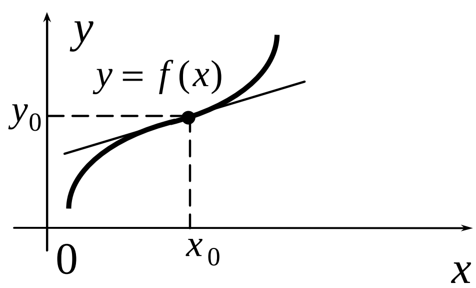


Рис. 5.1.11

Необходимое условие перегиба

Если $M_0(x_0,y_0)$ – точка перегиба графика функции $f(x)$, то $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие перегиба

Если $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе x через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M_0(x_0,y_0)$, $y_0=f(x_0)$ является точкой перегиба графика непрерывной функции $f(x)$.

5.1.10. Исследование функции на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

1. Найти область определения D_y функции $f(x)$.

2. Найти $f'(x)$, $f''(x)$, решить уравнение $f''(x)=0$ и выделить точки, где $f''(x)$ не существует. Найти критические на перегиб точки.

3. Разбить область определения функции критическими точками и точками разрыва функции на интервалы и найти знак $f''(x)$ в каждом интервале. Сделать вывод: найти интервалы выпуклости, вогнутости.

4. Найти вторые координаты точек перегиба, записать эти точки.

5.1.11. Асимптоты графика функции

Прямая называется **асимптотой** данной кривой, если расстояние от точки M кривой до этой прямой неограниченно уменьшается, когда точка M удаляется по кривой в бесконечность.

Различают вертикальные (Рис. 5.1.12) и наклонные (Рис. 5.1.13, Рис. 5.1.14) асимптоты.

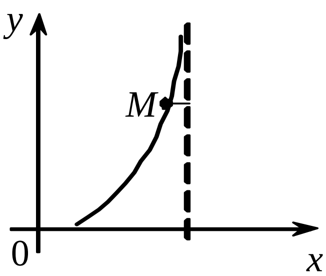


Рис. 5.1.12

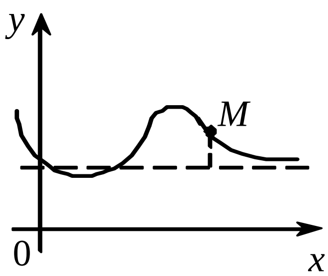


Рис. 5.1.13

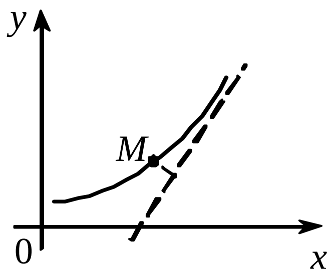


Рис. 5.1.14

1. **Вертикальная асимптота,** её уравнение имеет вид $x=a$. Если точка $x_0=a$ является точкой бесконечного разрыва функции $f(x)$, то **уравнение** $x=a$ является уравнением вертикальной асимптоты.

График функции может иметь несколько вертикальных асимптот.

2. **Наклонная асимптота,** её уравнение имеет вид $y=kx+b$. Найдём формулу для вычисления k и b, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

5.1.12. Общая схема исследования функции

1. Найти область определения D_y функции $f(x)$, точки разрыва, вертикальные асимптоты.

2. Найти наклонные асимптоты.

3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.

4. Найти корни функции ($f(x) = 0$) и интервалы знакопостоянства ($f(x) > 0,\ f(x) < 0$).

5. Найти $f'(x)$, найти интервалы монотонности, точки экстремума и экстремумы функции.

6. Найти $f''(x)$, найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

7. Построить график функции.

5.2. Контрольные вопросы

1) Дайте определения возрастающей и убывающей на интервале функций, постройте их графики.
2) Сформулируйте достаточные признаки возрастания и убывания функции.
3) Дайте определения точек максимума и минимума функции.
4) Сформулируйте необходимое условие экстремума. Будет ли необходимое условие достаточным?
5) Какая точка называется критической?
6) Сформулируйте достаточный признак экстремума функции.
7) Приведите схему исследования функции на возрастание, убывание, экстремумы.
8) Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
9) Дайте определение выпуклого и вогнутого графиков функции.
10) Сформулируйте достаточные условия выпуклости и вогнутости графика.
11) Какая точка называется точкой перегиба?
12) Сформулируйте необходимое и достаточное условия перегиба.
13) Сформулируйте схему исследования функции на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
14) Дайте определение асимптоты плоской кривой.
15) Какие виды асимптот существуют?

16) Какой вид имеет уравнение вертикальной асимптоты и как его найти?
17) Какой вид имеет уравнение наклонной асимптоты?
18) Запишите формулы для нахождения наклонной асимптоты.
19) Сформулируйте общую схему исследования функции.

Тема 6. Исследование функций двух переменных

6.1. Вопросы для самостоятельного изучения

6.1.1. Экстремумы функции двух переменных, необходимое условие экстремума

Точка $P_1(x_1, y_1)$ называется **точкой максимума** функции $z = f(x, y)$, если выполняется неравенство $f(P_1) > f(P)$ для любой точки $P(x, y)$ из некоторой окрестности точки $P_1(x_1, y_1)$ (Рис. 6.1.1).

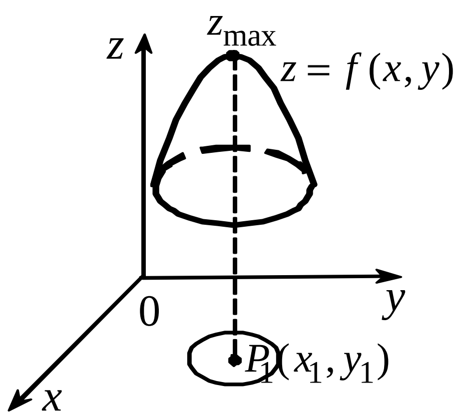


Рис. 6.1.1

Точка $P_2(x_2, y_2)$ называется **точкой минимума** функции $z = f(x, y)$, если выполняется неравенство $f(P_2) < f(P)$ для любой точки $P(x, y)$ из некоторой окрестности точки $P_2(x_2, y_2)$ (Рис. 6.1.2).

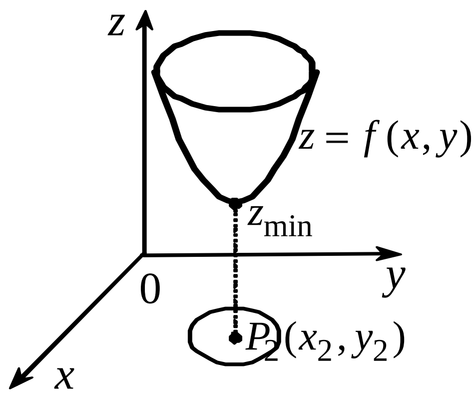


Рис. 6.1.2

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума** функции. Значения $z(x_1, y_1) = z(P_1) = z_{\max}$, $z(x_2, y_2) = z(P_2) = z_{\min}$ называются соответственно максимальным и минимальным значениями функции.

Необходимое условие экстремума. Если точка $P_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, то частные производные функции в этой точке равны нулю $\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = 0$.

6.1.2. Достаточные условия экстремума

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ и пусть точка $P_0(x_0, y_0)$ является критической точкой функции, то есть

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = 0, \ \frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = 0.$$

Предположим, что существуют все вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} \text{ в точке } P_0(x_0, y_0).$$

Составим из вторых производных выражение

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} \right)^2.$$

Чтобы ответить на вопрос, будет ли критическая точка $P_0(x_0, y_0)$ точкой экстремума, необходимо исследовать знак $\Delta(P_0)$.

Теорема (достаточное условие экстремума)

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ – критическая точка функции $z = f(x, y)$. Тогда:

1) если $\Delta(P_0) > 0$, то P_0 – точка экстремума, причем, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P_0) > 0$, то P_0 – точка минимума, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P_0) < 0$, то P_0 – точка максимума;

2) если $\Delta(P_0) < 0$, то P_0 – не является точкой экстремума;

3) если $\Delta(P_0) = 0$, то имеем неопределенный случай.

6.1.3. *Схема исследования функции* $z=f(x,y)$ *на экстремум:*

1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, составить и решить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow P_1(x_1,y_1),\ldots -$$

критические точки.

2. Найти частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

и составить выражение $\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2$.

По знаку Δ в критических точках найти точки экстремума.

3. Найти значения функции в точках экстремума.

6.2. Контрольные вопросы

1) Дайте определение функции двух переменных.
2) Что является графиком функции двух переменных?
3) Что называется областью определения функции двух переменных?
4) Что называется линией уровня функции $z=f(x,y)$?
5) Что называется частной производной функции $z=f(x,y)$ по переменной x, по переменной y?
6) Дайте определение полного дифференциала функции двух переменных.
7) Как определяются производные второго порядка? Какие производные называются смешанными?
8) Дайте определение производной функции по направлению.
9) Как можно задать направление ℓ?
10) Запишите формулу для вычисления производной по направлению.
11) Чему равны максимальное и минимальное значения производной по направлению?
12) Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной неявно $F(x,y,z)=0$.
13) Дайте определение точки минимума и точки максимума функции двух переменных.
14) Сформулируйте необходимое условие экстремума функции. Будет ли это условие достаточным?

15) Дайте определение критических точек. Как их найти?
16) Сформулируйте достаточное условие экстремума функции.
17) Приведите схему исследования функции на экстремум.

6.3. Практическое задание для самостоятельной работы

Провести полное исследование функций.

1. $y=\dfrac{x}{x^2-9}$ **2.** $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$ **3.** $y=\dfrac{x^2-4}{x}$ **4.** $y=\dfrac{x^4}{4}+x^3$

5. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ **6.** $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **7.** $y=\dfrac{4x-1}{4-x^2}$ **8.** $y=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$

9. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ **10.** $y=\dfrac{2x^2}{x+1}$ **11.** $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$ **12.** $y=\dfrac{2x^2+7x-4}{2x^2}$

13. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x-8}$ **14.** $y=\dfrac{x^2-5}{x^2-9}$ **15.** $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ **16.** $y=\dfrac{32-x^3}{x^2}$

17. $y=\dfrac{x^2+4}{x}$ **18.** $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ **19.** $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ **20.** $y=\dfrac{x}{x^2-25}$

21. $y=\dfrac{(x-1)^3-4}{(x-1)^2}$ **22.** $y=\dfrac{x^3}{x^2-25}$ **23.** $y=\dfrac{(x+1)^4}{4}+x^3+3x^2+3x+1$

24. $y=\dfrac{4x^2-4}{2x}$ **25.** $y=\dfrac{x^3}{x^2-4x}$ **26.** $y=\dfrac{x^3}{(x+3)^2}$ **27.** $y=\dfrac{8x^3-32}{4x^2}$

28. $y=\dfrac{2x-1}{1-x^2}$ **29.** $y=\dfrac{x^2-36}{x}$ **30.** $y=\dfrac{x^3}{x^2-25}$ **31.** $y=x^4-x^3$

РАЗДЕЛ. III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 7. Решение задач на нахождение неопределенных интегралов. Нахождение неопределенных интегралов различными методами

7.1. Вопросы для самостоятельного изучения

7.1.1. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Любая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных. Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то все множество первообразных имеет вид $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Терминология:

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования;

$\int$ – знак интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется **интегрированием**.

7.1.2. Свойства неопределенного интеграла

1. Свойства, связывающие операции дифференцирования и интегрирования:

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;   б) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

в) $\int F'(x)dx = F(x)+C$;   г) $\int dF(x) = F(x)+C$.

2. Свойства линейности неопределенного интеграла:

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x) \right] dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$$

где a – постоянная.

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

7.1.3. Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$	14. $\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C$

7.1.4. Метод интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Виды интегралов, берущихся методом интегрирования по частям

При разбиении подынтегрального выражения на множители u, dv необходимо руководствоваться следующими соображениями:

1) при вычислении интеграла $\int udv$ методом интегрирования по частям приходится вычислять два интеграла $\int dv$ и $\int vdu$, поэтому, за dv необходимо обозначить такое выражение, которое можно проинтегрировать, а интеграл $\int vdu$ должен быть проще, чем исходный;

2) так как под знаком нового интеграла $\int vdu$ находится дифференциал $du = u'dx$ функции $u(x)$, то за u надо обозначить функцию, которая при дифференцировании упрощается.

Выделим два типа интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.

Первый тип:

$$\int x^n \cos axdx, \quad \int x^n \sin axdx, \quad \int x^n e^{ax} dx, \quad n > 0 \text{ – целое.}$$

Здесь $u = x^n$, а в качестве dv выбирается $\cos axdx$, $\sin axdx$, $e^{ax}dx$.

Второй тип:

$$\int x^n \ln xdx, \quad \int x^n \operatorname{arctg} xdx, \quad \int x^n \arcsin xdx.$$

Здесь в качестве u берутся функции $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, а $dv = x^n dx$.

7.1.5. Рациональные дроби

Рациональной дробью или **дробно-рациональной функцией** называется отношение двух многочленов

$$f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Если $m < n$, то дробь называется **правильной**, если $m \geq n$, то дробь называется **неправильной**.

Неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной дроби

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = S_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{P_n(x)}, \; (k < n). \qquad (1)$$

Представление (1) называется **выделением целой части**.

Среди правильных рациональных дробей выделяются **простейшие** дроби двух видов:

1. **Простейшие дроби первого типа**:

$$\frac{A}{\left(x-x_0\right)^k}, \quad k \geq 1 \text{ – целое;}$$

2. **Простейшие дроби второго типа**:

$$\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^r}, \quad r \geq 1 \text{ – целое, } p^2-4q<0.$$

Разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей

1. Множителю знаменателя вида $\left(x-x_0\right)$ соответствует одна простейшая дробь первого типа $\frac{A}{x-x_0}$.

2. Множителю знаменателя вида $\left(x-x_0\right)^k$ соответствует k простейших дробей первого типа: $\frac{A_1}{x-x_0}$, $\frac{A_2}{\left(x-x_0\right)^2}$, …, $\frac{A_k}{\left(x-x_0\right)^k}$.

3. Множителю знаменателя вида x^2+px+q, где $p^2-4q<0$, соответствует одна простейшая дробь второго типа $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

4. Множителю знаменателя вида $\left(x^2+px+q\right)^r$, где $p^2-4q<0$ соответствует r простейших дробей второго типа: $\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}$, $\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}$, …, $\frac{M_rx+N_r}{\left(x^2+px+q\right)^r}$.

Здесь числа $A, A_1, A_2, \ldots, M, N, M_1, N_1, \ldots$ – неопределенные коэффициенты.

7.1.6. Интегрирование простейших рациональных дробей

1. **Простейшие дроби первого типа**

$$k=1:\ \int \frac{Adx}{x-x_0}=A=A\ln\left|x-x_0\right|+C\,;$$

$$k\neq 1:\ \int \frac{Adx}{\left(x-x_0\right)^k}=\frac{A\left(x-x_0\right)^{-k+1}}{-k+1}+C\,.$$

2. **Простейшие дроби второго типа**

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+a^2}dx==\frac{M}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)+\frac{N}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

.

7.1.7. Интегрирование рациональных дробей

Вычисление интеграла от рациональной дроби $\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx$, где $Q_m(x)$, $P_n(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, будем проводить по следующей **схеме:**

1) определить, является дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ правильной $(m<n)$ или неправильной $(m\geq n)$, у неправильной дроби выделить целую часть

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=S_{m-n}(x)+\frac{R_k(x)}{P_n(x)},\ \text{где}\ k<n\,;$$

2) разложить многочлен $P_n(x)$ на действительные множители;

3) разложить правильную дробь в сумму простейших дробей;

4) подставить полученное разложение под знак интеграла и вычислить интегралы, пользуясь табличными интегралами и способами интегрирования простейших дробей.

7.1.8. Метод замены переменной (метод подстановки)

Рассмотрим неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Вместо переменной x под знак интеграла можно ввести новую вспомогательную переменную t, связанную с x некоторой зависимостью $x=\varphi(t)$. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$, а интеграл преобразуется к виду

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Формула (2) называется **формулой замены переменной**. Смысл этой формулы состоит в том, что интеграл в правой части либо является табличным, либо приводится к табличному легче, чем исходный. Для этого необходимо выбрать удачную замену (подстановку) $x = \varphi(t)$. После того, как интеграл в правой части вычислен, необходимо вернуться к первоначальной переменной x, используя обратную функцию $t = \psi(x)$.

7.1.9. Интегрирование иррациональных выражений

1. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx, \tag{3}$$

где R – рациональная функция своих аргументов. Сделаем замену переменной $\sqrt[n]{ax+b} = t \quad \Rightarrow \quad ax+b = t^n$.

Выразим x и найдем dx

$$ax = t^n - b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{a}\left(t^n - b\right) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

Используя формулу замены переменной (2), получим интеграл от рациональной функции переменной t.

2. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{x^{\alpha}}, \sqrt[p]{x^{\beta}}, \ldots\right)dx, \tag{4}$$

где R – рациональная функция своих аргументов. Найдем наименьшее общее кратное n показателей корней $m, p, \ldots$, входящих под знак интеграла. Сделаем замену переменной

$$\sqrt[n]{x} = t \quad \Rightarrow \quad x = t^n \quad dx = nt^{n-1}dt.$$

Используя формулу замены переменной (2), получим интеграл от рациональной дроби.

7.2. Контрольные вопросы

1) Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$? Сколько первообразных имеет данная функция?

2) Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$? Каков его геометрический смысл?
3) Какие свойства связывают операции дифференцирования и интегрирования?
4) Сформулируйте свойства линейности неопределенного интеграла.
5) Чему равен интеграл $\int f(ax+b)dx$, если $\int f(x)dx = F(x) + C$?
6) Запишите формулу интегрирования по частям.
7) Перечислите виды интегралов, берущихся по частям.
8) По каким правилам разбивается подынтегральное выражение на множители u и dv?
9) Что называется рациональной дробью? Какая дробь называется правильной, неправильной? Что значит, выделить целую часть?
10) Какие дроби называются простейшими? Какой вид имеет разложение правильной дроби в сумму простейших дробей?
11) Какой вид имеет формула замены переменной в неопределенном интеграле?

Тема 8. Вычисление определенных интегралов. Приложения определенного интеграла. Исследование сходимости несобственных интегралов

8.1. Вопросы для самостоятельного изучения

8.1.1. Определение определенного интеграла

Дана функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Отрезок $[a, b]$ разобьем произвольно на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$.

Выберем произвольно точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и найдем значения функции $f(\xi_k)$ для $k = 1, 2, \ldots, n$.

Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется **интегральной суммой**. Она зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и выбора точек ξ_k.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм при $\max \Delta x_k \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и от выбора точек ξ_k, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

8.1.2. Свойства определенного интеграла:

1. Свойства линейности:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx;$$

$$\int_a^b C\, f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

2. Свойство аддитивности: для любых чисел a, b, c имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Интегрирование неравенств: если $f(x) \le q(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b q(x)dx.$$

4. Оценка интеграла: если m, M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

5. Теорема о среднем: если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такая точка $c \in [a, b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Значение

$$f(c)=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$

называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

8.1.3. Вычисление определенного интеграла, физические приложения определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница: если $F(x)$ – первообразная непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \tag{5}$$

8.1.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$, то имеет место **формула интегрирования по частям**

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{6}$$

8.1.5. Формула замены переменной в определенном интеграле

Рассмотрим определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Пусть $x = x(t)$ – дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$.

Тогда в определенном интеграле можно перейти к новой переменной t согласно формуле

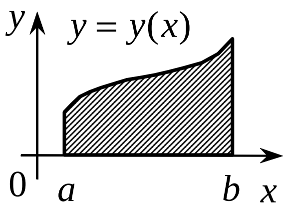
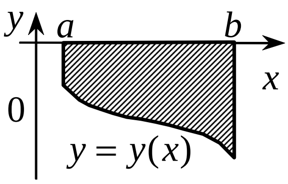
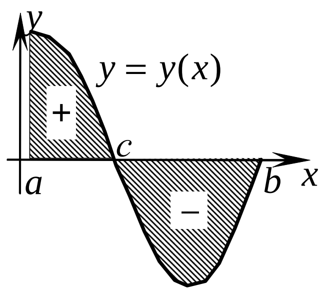
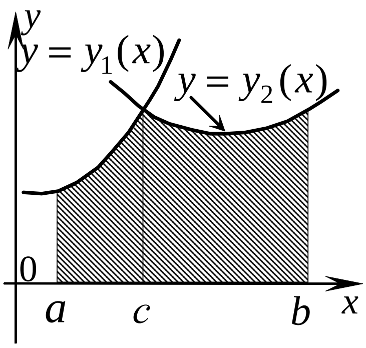
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \left\{\begin{array}{c} x = x(t) \\ dx = x'(t)\,dt \\ x = a \Rightarrow t = \alpha \\ x = b \Rightarrow t = \beta \end{array}\right\} = \int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t)\right)x'(t)dt. \tag{7}$$

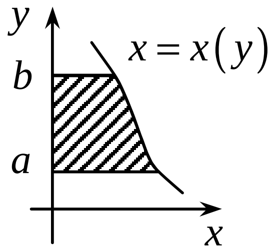
Эта формула называется **формулой замены переменной** в определенном интеграле, а функция $x = x(t)$ – подстановкой.

8.1.6. Приложения определенного интеграла

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная осью Ox (уравнение $y=0$), вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком функции $f(x)$.

ТАБЛИЦА 8.1.1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

<table>
<tr><th>Область</th><th>Чертеж</th><th>Формула</th></tr>
<tr><td>1. Границы D: $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=y(x)$, $y(x)\geq 0$ при $x\in[a,b]$.</td><td>
</td><td>$S=\int_a^b y(x)dx$</td></tr>
<tr><td>2. Границы D: $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=y(x)$, $y(x)\leq 0$ при $x\in[a,b]$.</td><td>
</td><td>$S=-\int_a^b y(x)dx$</td></tr>
<tr><td>3. Границы D: $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=y(x)$; $y(x)\geq 0$ при $x\in[a,c]$, $y(x)\leq 0$ при $x\in[c,b]$.</td><td>
</td><td>$S=\int_a^c y(x)dx-\int_c^b y(x)dx$</td></tr>
<tr><td>4. Границы D: $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=y_1(x)$ при $x\in[a,c]$, $y=y_2(x)$ при $x\in[a,b]$.</td><td>
</td><td>$S=\int_a^c y_1(x)dx+\int_c^b y_2(x)dx$</td></tr>
</table>

Область	Чертеж	Формула
5. Границы D: $x=0$, $y=a$, $y=b$, $x=x(y)$, $x(y)\ge 0$ $y\in[a,b]$		$S=\int_a^b x(y)dy$

8.1.7. Площадь плоской фигуры

Рассмотрим плоскую фигуру D, ограниченную прямыми $x=a$, $x=b$ и графиками двух функций $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, причем $y_2(x)\ge y_1(x)$ при $x\in[a,b]$ (рис. 8.1.1).

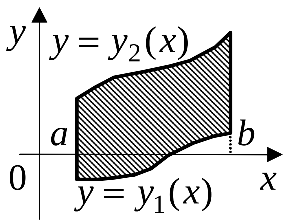


РИС. 8.1.1

Площадь фигуры D при любом расположении кривых $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, относительно осей координат находится по формуле

$$S=\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]dx\ .$$

8.1.8. Объем тела вращения

1. Пусть криволинейная трапеция D, ограниченная прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ и графиком функции $y=y(x)$ (рис. 8.1.2), вращается вокруг оси Ox. В результате получим тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

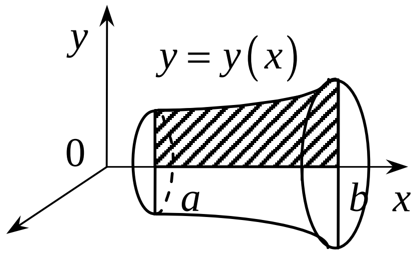


РИС. 8.1.2

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx. \qquad (8)$$

2. Если криволинейная трапеция имеет основание на оси Oy, то есть ограничена прямыми $y=a$, $y=b$, $x=0$, $x=x(y)$ и вращается вокруг оси Oy (рис. 8.1.3), то объем полученного тела вращения находится по формуле

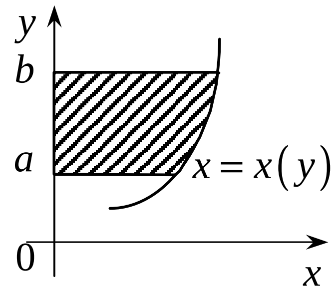


рис. 8.1.3

$$V=\pi\int_a^b x^2(y)dy.$$

8.1.9. Несобственные интегралы с бесконечным верхним пределом интегрирования

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на бесконечном отрезке $[a,\infty)$. Выберем произвольно $t\in[a,\infty)$ и рассмотрим определенный интеграл $\int_a^t f(x)dx$.

Несобственным интегралом от функции $y=f(x)$ на промежутке $[a,\infty)$ называется

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

Если предел существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, если не существует, то **расходящимся**.

Для вычисления несобственного интеграла существует формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^\infty f(x)dx=F(x)\Big|_a^\infty=F(\infty)-F(a), \qquad (9)$$

где $F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)$, а $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

8.2. Контрольные вопросы

1) Сформулируйте определение определенного интеграла.
2) Перечислите свойства определенного интеграла.
3) Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

4) Какой вид имеет формула интегрирования по частям для определенного интеграла?
5) Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
6) Что называется криволинейной трапецией?
7) Чему равна площадь криволинейной трапеции?
8) Как найти площадь произвольной фигуры D?
9) Запишите формулу для вычисления объема тела, полученного от вращения криволинейной трапеции D: $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=y(x)$ вокруг оси Ox.
10) Запишите формулу для вычисления объема тела, полученного от вращения плоской фигуры D: $x=a,\quad x=b,\quad y=y_1(x),\quad y=y_2(x),$ $y_1(x)\le y_2(x),\quad x\in[a,b]$ вокруг оси Ox.
11) Сформулируйте определение несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования.
12) Какой вид имеет формула Ньютона-Лейбница для вычисления несобственного интеграла?

8.3. Практическое задание для самостоятельной работы

Задание содержит 4 задачи. Каждая задача имеется в 35 вариантах. Номер задачи состоит из двух чисел: первое число – порядковый номер задачи, второе число – номер варианта.

Студент решает ту задачу, номер варианта которой совпадает с его номером по списку в журнале, подставляя значение параметра $k=1,2,3,\ldots$ – сумма последних двух цифр номера группы.

Задача 1.

Найти интеграл $\int f(x)dx$, используя таблицу интегралов, свойства линейности интегралов и метод непосредственного интегрирования.

Варианты

1.1. $\int\left(2x^{k+1}-\dfrac{1}{\cos^2 3x}+\sqrt[k+1]{x}\right)dx$; **1.2.** $\int\left(3^{x+k}+\sin 2x-\dfrac{4}{x^{k+1}}\right)dx$;

1.3. $\int\left(kx^3+\sqrt[3]{x^k}-4\cos 5x\right)dx$; **1.4.** $\int\left(4^{kx}+kx^{-2k}-3\cos 2kx\right)dx$;

1.5. $\int\left(\dfrac{2}{\sin^2 3x}+kx^{k+3}-(k+1)e^x\right)dx$; **1.6.** $\int\left(\dfrac{k}{7x}-\dfrac{3}{4+x^2}+x^{2k+1}\right)dx$;

1.7. $\int\left(\frac{k}{\cos^2 2x}+3x^{k+2}+ke^{2kx}\right)dx$;

1.8. $\int\left(\frac{k}{\sqrt{x}}+kx^{3k}-\frac{4}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$;

1.9. $\int\left(\frac{k}{k^2+x^2}+2\sin 3x-x^{-k}\right)dx$;

1.10. $\int\left(k-2\cos 2x+\frac{k}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

1.11. $\int\left(\frac{k}{\sin^2 2kx}-\sqrt{x^{k+2}}+e^{(k+1)x}\right)dx$;

1.12. $\int\left(\frac{3}{x^{k+2}}+4k-\frac{k}{k^2+x^2}\right)dx$;

1.13. $\int\left(\frac{k}{kx}+\sqrt[3]{x^{2k-1}}-\frac{k}{\cos^2 3x}\right)dx$;

1.14. $\int\left(ke^{-2kx}+2\cos\frac{x}{2k}+3x^k\right)dx$;

1.15. $\int\left(4^{(k+1)x}-\frac{k+2}{\sqrt{k^2-x^2}}+\frac{2}{x^k}\right)dx$;

1.16. $\int\left(\cos 3x-\sqrt[4]{x^k}+\frac{k}{\sin^2 x}\right)dx$;

1.17. $\int\left(2kx^{3k}+\sqrt{x^k}-3\sin 2kx\right)dx$;

1.18. $\int\left(\frac{x^{k+1}}{k+2}+\frac{k+2}{\sqrt{1-x^2}}-3e^{2kx}\right)dx$;

1.19. $\int\left(\frac{k}{(x+k)^2}-3^{2kx}-k\cos 2x\right)dx$;

1.20. $\int\left(e^{2kx}-\sqrt[3]{x^k}+\frac{k}{k^2+x^2}\right)dx$;

1.21. $\int\left(3x^{k+2}-\frac{1}{\cos^2 4x}+\sqrt[k+2]{x}\right)dx$;

1.22. $\int\left(5^{x+2k}+\sin 4x-\frac{2}{x^{k+2}}\right)dx$;

1.23. $\int\left(2kx^4+\sqrt[3]{x^{k+2}}-5\cos 4x\right)dx$;

1.24. $\int\left(\frac{k}{\sin^2 2x}+3x^{k+3}-ke^{kx}\right)dx$;

1.25. $\int\left(\frac{k+1}{5x}-\frac{k+2}{9+x^2}+x^{3k}\right)dx$;

1.26. $\int\left(\frac{k+1}{\cos^2 3x}+kx^{k+3}+3e^{3kx}\right)dx$;

1.27. $\int\left(\frac{k}{\sqrt{x^k}}+3x^{2k}-\frac{k}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$;

1.28. $\int\left(5^{kx}+kx^{-3k}-k\cos 3kx\right)dx$;

1.29. $\int\left(\frac{k+2}{k^2+x^2}+3\sin kx-x^{9-k}\right)dx$;

1.30. $\int\left(k-3\cos kx+\frac{k+1}{\sqrt[5]{x^{k+2}}}\right)dx$;

1.31. $\int\left(\frac{k+2}{\sin^2 kx}-\sqrt{x^{3k}}+2e^{k+x}\right)dx$;

1.32. $\int\left(\frac{4}{x^{k+1}}+2k-\frac{k+2}{k^2+x^2}\right)dx$;

1.33. $\int\left(kx^{k+2}+\frac{k+1}{\sqrt[3]{x^{5k}}}-3\sin 2kx\right)dx$;

1.34. $\int\left(\frac{4}{\sin^2 3x}+3x^{4k}+e^{2kx}\right)dx$;

1.35. $\int\left(\frac{k+1}{\cos^2 4x}+\frac{3}{x^{k+2}}-ke^{2kx}\right)dx$.

Задача 2.

Найти интеграл, применив формулу интегрирования по частям.

Варианты

2.1. $\int(1-kx)\sin 2xdx$; **2.2.** $\int(x+2)\sin kxdx$; **2.3.** $\int x\cos kxdx$;

2.4. $\int(kx-1)\cos 4xdx$; **2.5.** $\int(2+3x)\sin kxdx$; **2.6.** $\int(2x-1)e^{kx}dx$;

2.7. $\int(2-3x)\cos\frac{x}{k}dx$; **2.8.** $\int(3-4x)\sin kxdx$; **2.9.** $\int(1-kx)\cos 3xdx$;

2.10. $\int(kx-3)\cos 5xdx$; **2.11.** $\int(kx+3)\cos 2xdx$; **2.12.** $\int(4+kx)\sin 2xdx$;

2.13. $\int(x-k)\operatorname{arctg} xdx$; **2.14.** $\int(2-kx)\sin 3xdx$;

2.15. $\int(x-k)\ln xdx$; **2.16.** $\int(2-x)\cos kxdx$; **2.17.** $\int(x+k)\ln xdx$;

2.18. $\int xe^{-kx}dx$; **2.19.** $\int(4x-3)\sin\frac{x}{k}dx$; **2.20.** $\int(kx+1)\ln xdx$;

2.21. $\int(2-kx)e^{\frac{x}{2}}dx$; **2.22.** $\int(1-3x)\cos\frac{x}{k}dx$; **2.23.** $\int(4x+2)e^{kx}dx$;

2.24. $\int x^k\ln xdx$; **2.25.** $\int(k-3x)\sin\frac{x}{5}dx$; **2.26** $\int(1-kx)\ln xdx$;

2.27. $\int(5-kx)e^{\frac{x}{3}}dx$; **2.28.** $\int(kx+1)\sin\frac{x}{4}dx$; **2.29.** $\int(kx+2)\ln xdx$;

2.30. $\int(1-5x)e^{kx}dx$; **2.31.** $\int(1-kx)\cos\frac{x}{4}dx$; **2.32.** $\int(kx-2)\ln xdx$;

2.33. $\int(k-x)e^{3x}dx$; **2.34.** $\int(x+1)\sin kxdx$. **2.35.** $\int(1-kx)\cos 5xdx$

Задача 3.

Найти интеграл от рациональной дроби.

Варианты

3.1. $\int\frac{kx-3}{(x+1)(x^2+4)}dx$; **3.2.** $\int\frac{7x^2-k}{(x-1)(x+1)^2}dx$;

3.3. $\int\frac{x^2+k}{(x+2)(x-1)^2}dx$; **3.4.** $\int\frac{kx-8}{(x-1)(x^2+4)}dx$;

3.5. $\int\frac{x^2+2x-k}{(x+1)(x^2+1)}dx$; **3.6.** $\int\frac{3x+k}{x^2(x-1)}dx$;

3.7. $\int \frac{2x^2+kx-9}{x\left(x^2+9\right)}dx$; **3.8.** $\int \frac{2x^2+x-k}{x(x-1)^2}dx$;

3.9. $\int \frac{kx+1}{(x-3)\left(x^2+1\right)}dx$; **3.10.** $\int \frac{x^2-kx+7}{(x-2)(x+1)^2}dx$;

3.11. $\int \frac{kx-2}{x\left(x^2+1\right)}dx$; **3.12.** $\int \frac{2x-k}{x^2(x-3)}dx$;

3.13. $\int \frac{kx+2}{x^2-4x+3}dx$; **3.14.** $\int \frac{2x^2-kx+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$;

3.15. $\int \frac{kx-1}{x^2-5x+6}dx$; **3.16.** $\int \frac{2x^2+2x+k}{\left(x^2+9\right)(x+2)}dx$;

3.17. $\int \frac{x^2+8}{x\left(x^2+4\right)}dx$; **3.18.** $\int \frac{2x^2+k}{(x-2)(x-1)^2}dx$;

3.19. $\int \frac{kx-4}{x^2-2x-3}dx$; **3.20.** $\int \frac{x^2+kx-1}{(x-1)\left(x^2+4\right)}dx$;

3.21. $\int \frac{3x^2+k}{x\left(x^2-1\right)}dx$; **3.22.** $\int \frac{7x+k}{(x+1)\left(x^2+9\right)}dx$;

3.23. $\int \frac{x^2-k}{\left(x^2+4\right)(x-3)}dx$; **3.24.** $\int \frac{2x^2-kx-2}{x^2-3x+2}dx$;

3.25. $\int \frac{kx^2-1}{x^2(x+4)}dx$; **3.26.** $\int \frac{2x+k}{(x+3)\left(x^2+1\right)}dx$;

3.27. $\int \frac{2x^2+kx-2}{(x-2)^2(x-1)}dx$; **3.28.** $\int \frac{2x^2-kx+3}{x^2(x+5)}dx$;

3.29. $\int \frac{5x-k}{\left(x^2+1\right)(x-4)}dx$; **3.30.** $\int \frac{x^2-kx+4}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$;

3.31. $\int \frac{x^2-kx-4}{(x-1)\left(x^2+4\right)}dx$; **3.32.** $\int \frac{kx-1}{(x+2)\left(x^2+1\right)}dx$;

3.33. $\int \frac{3x^2-kx+11}{(x-2)\left(x^2+9\right)}dx$; **3.34.** $\int \frac{kx^2+2x-12}{x\left(x^2+4\right)}dx$;

3.35. $\int \frac{2x^2 - kx + 3}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

Задача 4.

Найти интеграл от иррациональной функции $\int R\left(\sqrt[n]{x^k},\ \sqrt[m]{x^l},\ \ldots\right)dx$ методом замены переменной.

Варианты

4.1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + k\sqrt[3]{x}\right)}$; **4.2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[5]{x^3} + k\sqrt{x}\right)}$; **4.3.** $\int \frac{dx}{k\left(\sqrt{x} + 3\right)}$;

4.4. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x} + k^2\right)\sqrt[6]{x}}$; **4.5.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x} + k^2\right)}$; **4.6.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + k\sqrt[4]{x}\right)}$;

4.7. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x} + k\sqrt[4]{x}\right)}$; **4.8.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x} + 4k^2\right)}$; **4.9.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}\left(\sqrt{x-1} + k^2\right)}$;

4.10. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x} + k^2\right)}$; **4.11.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x} + k\right)}$; **4.12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(x-k)}$;

4.13. $\int \frac{kdx}{\sqrt[3]{x} + k\sqrt{x}}$; **4.14.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - k\sqrt{x}}$; **4.15.** $\int \frac{dx}{k\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}$;

4.16. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\ dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - k\sqrt[3]{x}\right)}$; **4.17.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[6]{x} - k\right)}$; **4.18.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x} - 3k\right)}$;

4.19. $\int \frac{dx}{k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$; **4.20.** $\int \frac{dx}{k\sqrt[3]{x^2} - k\sqrt{x}}$; **4.21.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(k^2\sqrt[4]{x} + 1\right)}$;

4.22. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x} - k^2\right)}$; **4.23.** $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}\left(\sqrt[3]{x} - k^2\right)}$; **4.24.** $\int \frac{dx}{k\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}}$;

4.25. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + k\sqrt{x}}$; **4.26.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x} - 2k\right)}$; **4.27.** $\int \frac{dx}{k\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}$;

4.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - k\sqrt[4]{x}\right)}$; **4.29.** $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x} - k\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}$; **4.30.** $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x} - k^2\right)}$;

4.31. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x} - k\sqrt{x}\right)}$; **4.32.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x} - k^2\right)}$; **4.33.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2k\sqrt[4]{x}\right)}$;

4.34. $\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}-k\right)}$; **4.35.** $\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{x+3}}$.

РАЗДЕЛ. IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 9. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

9.1.1. Вопросы для самостоятельного изучения

9.1.1.1. Дифференциальные уравнения, основные понятия

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество.

Решение дифференциального уравнения, содержащее произвольные постоянные, называется **общим решением**.

Решение дифференциального уравнения, получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных, называется **частным решением**.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение, содержащее независимую переменную, неизвестную функцию и ее первую производную.

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в одной из следующих форм:

1) общая форма

$$F(x, y, y') = 0;$$

2) нормальная форма

$$y' = f(x, y);$$

3) дифференциальная форма

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = y(x, C)$, которая при любом допустимом значении постоянной C является решением ДУ.

Начальным условием для дифференциального уравнения первого порядка называется условие вида

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 .$$

Частным решением дифференциального уравнения, называется решение, удовлетворяющее начальному условию.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию, называется **задачей Коши** и записывается в виде

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Графиком частного решения является кривая в плоскости xOy, называемая **интегральной кривой**, и проходящая через точку (x_0, y_0).

Общее решение дифференциального уравнения будет изображаться **множеством интегральных кривых**.

9.1.1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \tag{10}$$

или

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(x). \tag{11}$$

Характерное свойство этих уравнений – все входящие в него функции имеют вид произведения функции только аргумента x на функцию только аргумента y.

Метод решения дифференциального уравнения (10):

а) разделить переменные, то есть преобразовать уравнение так, чтобы переменные x и y стояли в разных частях уравнения

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx=-M_2(x)\cdot N_2(y)dy,$$
$$\frac{M_1(x)dx}{M_2(x)}=-\frac{N_2(y)dy}{N_1(y)};$$

б) проинтегрировать левую и правую части уравнения

$$\int\frac{M_1(x)dx}{M_2(x)}=-\int\frac{N_2(y)dy}{N_1(y)}+C.$$

Метод решения дифференциального уравнения (11)**:**

а) представить производную y' как отношение дифференциалов

$$y'=\frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y);$$

б) разделить переменные

$$dy=f_1(x)\cdot f_2(y)dx \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx;$$

в) проинтегрировать $\displaystyle\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C.$

9.1.1.3. Однородные дифференциальные уравнения в нормальной форме

Однородным дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме называется уравнение первого порядка вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{12}$$

Метод решения этих уравнений состоит в сведении их к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замены неизвестной функции на новую функцию.

Введем новую неизвестную функцию $z=z(x)$ по формуле $z=\dfrac{y}{x}$. Тогда

$$y=zx \quad\Rightarrow\quad y'=z'x+z.$$

Подставим в уравнение (12) значения $y'=z'x+z$ и $\dfrac{y}{x}=z$, получим

$$z'x + z = f(z) \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{f(z) - z}{x}.$$

Получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его, в полученном решении возвращаемся к y, подставляя $z = \frac{y}{x}$.

9.1.1.4. Однородные дифференциальные уравнения в дифференциальной форме

Многочленом от двух переменных называется функция вида

$$P(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

где i, j – целые положительные числа.

Многочлен от двух переменных

$$P_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k},$$

все члены которого имеют степень n, называется **однородным многочленом** степени n.

Дифференциальное уравнение

$$P_n(x,y)dy + Q_n(x,y)dx = 0, \qquad (13)$$

где $P_n(x,y), Q_n(x,y)$ – однородные многочлены степени n, является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Метод решения. Замена переменной $z = \frac{y}{x}$ сводит дифференциальное уравнение (13) к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого в уравнение (13) надо подставить

$$y = zx, \quad dy = zdx + xdz$$

и сделать алгебраические преобразования, разделяющие переменные.

9.1.2. Контрольные вопросы

1) Дать определение дифференциального уравнения, порядка ДУ, решения ДУ.
2) Дать определение общего решения, начального условия, частного решения ДУ первого порядка.
3) Записать ДУ с разделяющимися переменными в двух формах.

4) Описать метод решения ДУ с разделяющимися переменными.
5) Дать определение однородного ДУ первого порядка.
6) Сформулировать метод решения однородного ДУ.
7) Дать определение однородного многочлена степени n.
8) Какой вид имеет однородное ДУ в дифференциальной форме?

Тема 10. Решение дифференциальных уравнений первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли

10.1.1. Вопросы для самостоятельного изучения

10.1.1.1. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + a(x)y = f(x), \tag{14}$$

где $a(x)$ – коэффициент, $f(x)$ – правая часть (свободный член) уравнения.

Метод решения линейного дифференциального уравнения называется **методом вариации произвольной постоянной**.

Метод состоит из трех этапов:

1) составим новое дифференциальное уравнение, заменив в уравнении (14) правую часть на нуль

$$y' + a(x)y = 0 \tag{15}$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\int a(x)dx + \ln C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln e^{-\int a(x)dx} + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-A(x)}, \text{ где } A(x) = \int a(x)dx;$$

2) в полученном решении уравнения (15) заменим постоянную C на функцию $z = z(x)$

$$y = ze^{-A(x)}. \tag{16}$$

Найдем такое значение $z(x)$, чтобы функция (16) была решением дифференциального уравнения (14). Для этого подставим y и

$$y' = z'e^{-A(x)} - ze^{-A(x)} \cdot A'(x)$$
в уравнение (14), получим
$$z'e^{-A(x)} - ze^{-A(x)} \cdot A'(x) + a(x)ze^{-A(x)} = f(x).$$
Так как $A'(x) = a(x)$, то второе и третье слагаемые в левой части уравнения уничтожаются, в результате получим уравнение относительно функции z
$$z' = f(x)e^{A(x)}.$$
Проинтегрировав левую и правую части уравнения, получим общее решение
$$z = z(x, C);$$
3) подставим найденное значение z в функцию (16), получим
$$y = z(x, C)\, e^{-A(x)} -$$
общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

10.1.1.2. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида
$$y' + a(x)y = f(x)y^n, \tag{17}$$
где $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Для решения этого уравнения обе его части делятся на y^n и вводится новая функция
$$z = y^{1-n}.$$
В результате приходим к линейному дифференциальному уравнению
$$z' + (1-n)a(x)z = (1-n)f(x), \tag{18}$$

10.1.2. Контрольные вопросы

1) Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?
2) Из каких этапов состоит метод решения линейного ДУ?
3) Какой вид имеет уравнение Бернулли?
4) Опишите суть метода решения уравнения Бернулли.

Тема 11. Решение дифференциальных уравнений второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения

11.1.1. Вопросы для самостоятельного изучения

11.1.1.1. Дифференциальные уравнения второго порядка, общие понятия

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные первого и второго порядков.

Рассмотрим два вида записи дифференциальных уравнений второго порядка:

1) общий вид $F(x, y, y', y'') = 0$;

2) нормальный вид (разрешенный относительно старшей производной) $y'' = f(x, y, y')$.

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Начальные условия для уравнений второго порядка имеют вид

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'.$$

Они задают точку $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит интегральная кривая, и угловой коэффициент касательной $k = y_0'$ к интегральной кривой в этой точке.

Задача Коши – это задача нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}.$$

Чтобы из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, необходимо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными C_1, C_2

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0, \\ \varphi'_x(x_0, C_1, C_2) = y'_0. \end{cases}$$

Чтобы получить частное решение, полученные значения C_1, C_2 необходимо подставить в общее решение.

11.1.1.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{19}$$

где $p(x), q(x)$ – коэффициенты.

Две функции y_1, y_2 называются линейно зависимыми, если их связывает соотношение $y_2 = Cy_1$, где C – постоянная. В противном случае функции называются линейно независимыми.

Общее решение ЛОДУ (19) второго порядка имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимые частные решения ЛОДУ, а C_1, C_2 произвольные постоянные.

Если коэффициенты p, q – постоянные, то для нахождения решения ЛОДУ

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{20}$$

составляется характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Это алгебраическое квадратное уравнение, которое, в зависимости от знака дискриминанта $D = p^2 - 4q$, имеет корни: различные действительные, или равные действительные, или комплексно-сопряженные.

Вид общего решения ЛОДУ (20) приведен в таблице (Таблица 8.3.1).

Таблица 8.3.1

Корни характеристического уравнения	Частные решения	Вид общего решения
1. $D>0$, k_1, k_2 – различные, действительные корни	$y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2. $D=0$, $k_1=k_2=k$ – равные, действительные корни	$y_1=e^{kx}$, $y_2=xe^{kx}$	$y=e^{kx}\left(C_1+C_2x\right)$
3. $D<0$, $k_{1,2}=\alpha+i\beta$ комплексно – сопряженные корни	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

11.1.1.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) второго порядка называется уравнение вида

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{21}$$

где $p(x), q(x)$ – коэффициенты, а $f(x)$ – правая часть ЛНДУ или свободный член.

Свойства ЛНДУ:

1. Если функция y_1 является решением ЛНДУ (21), а функция y_2 решением соответствующего ЛОДУ, то y_1+y_2 является решением ЛНДУ (21).
2. Если функция y_1 является ренением ЛНДУ с правой частью $f_1(x)$, а функция y_2 решением ЛНДУ с правой частью $f_2(x)$, то функция $C_1y_1+C_2y_2$ является решением ЛНДУ с правой частью $C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$ (*принцип суперпозиции*).
3. **Общее решение** ЛНДУ (21) имеет вид

$$y=Y+\tilde{y},$$

где Y – общее решение соответствующего ЛОДУ (6.2)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

а $\tilde{y}$ – частное решение ЛНДУ (21).

1. Рассмотрим случай, когда

$$f(x) = e^{\lambda x}P_n(x).$$

Для подбора $\tilde{y}$ необходимо выполнить два действия:

1) сравнить число λ с корнями k_1, k_2 характеристического уравнения, установить один из следующих случаев:

$$\lambda \neq k_1, \lambda \neq k_2; \qquad \lambda = k_1, \lambda \neq k_2; \qquad \lambda = k_1 = k_2;$$

2) определить степень n многочлена $P_n(x)$ и записать многочлен $Q_n(x)$ той же степени n, но с неопределенными коэффициентами:

$$n = 0 \Rightarrow Q_0(x) = A, \qquad n = 1 \Rightarrow Q_1(x) = Ax + B,$$

$$n = 2 \Rightarrow Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C, \; n = 3 \Rightarrow Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

и т.д. Вид частного решения $\tilde{y}$ определяется из таблицы (Таблица 8.3.2).

ТАБЛИЦА 8.3.2

№	Условия на λ	Вид частного решения $\tilde{y}$
1.	$\lambda \neq k_1, \quad \lambda \neq k_2$	$\tilde{y} = e^{\lambda x}Q_n(x)$
2.	$\lambda = k_1, \quad \lambda \neq k_2$	$\tilde{y} = xe^{\lambda x}Q_n(x)$
3.	$\lambda = k_1 = k_2$	$\tilde{y} = x^2e^{\lambda x}Q_n(x)$

2. Рассмотрим случай, когда

$$f(x) = e^{\lambda x}(M\cos\omega x + N\sin\omega x).$$

Для подбора $\tilde{y}$ необходимо выполнить два действия:

а) выписать числа λ, ω;

б) составить пару комплексно-сопряженных чисел $\lambda \pm \omega i$ и сравнить их с корнями характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

установить один из случаев:

1) $\lambda \pm \omega i \neq k_1, \;\; \lambda \pm \omega i \neq k_2;$

2) $\lambda \pm \omega i = k_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$

Вид частного решения $\tilde{y}$ ЛНДУ определяется из таблицы (Таблица 8.3.3).

Таблица 8.3.3

№	Условия на λ, ω	Вид частного решения $\tilde{y}$
1.	$\lambda \pm \omega i \neq k_{1,2}$	$\tilde{y} = e^{\lambda x}\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right)$
2.	$\lambda \pm \omega i = k_{1,2}$	$\tilde{y} = xe^{\lambda x}\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right)$

11.1.2. Контрольные вопросы

1) Что называется дифференциальным уравнением второго порядка?
2) Какой вид имеет общее решение дифференциального уравнения второго порядка?
3) Какой вид имеют начальные условия для уравнения второго порядка и что называется задачей Коши?
4) Какой вид имеет линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка?
5) Какой вид имеет общее решение ЛОДУ?
6) Что называется характеристическим уравнением для ЛОДУ с постоянными коэффициентами?
7) Запишите вид общего решения ЛОДУ в зависимости от вида корней характеристического уравнения.
8) Какое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка?
9) Какой вид имеет общее решение ЛНДУ?
10) Каким методом ищется частное решение $\tilde{y}$ ЛНДУ?
11) Какое условие относительно λ необходимо проверить, если правая часть уравнения имеет вид $f\left(x\right) = e^{\lambda x}P_n\left(x\right)$?
12) В каком виде ищется $\tilde{y}$, если правая часть уравнения имеет вид $f\left(x\right) = e^{\lambda x}\left(M\cos\omega x + N\sin\omega x\right)$?

11.1.3. Практическое задание для самостоятельной работы

11.1.3.1. Задача

Центр масс механической системы совершает прямолинейные вынужденные колебания вдоль оси Ox под действием сил:

$$F_{\text{упр}} = -m\omega_0^2 x \text{ – сила упругости },$$

$$F_{\text{сопр}} = -2m\beta V = -2m\beta\dot{x} \text{ – сила сопротивления,}$$

$$F(t) = m f(t) \text{ – внешняя сила,}$$

где m – масса системы, $\beta > 0$ – коэффициент затухания собственных колебаний, ω_0 – собственная частота колебаний системы.

Все физические величины измеряются в системе СИ.

Известно (второй закон Ньютона), что

$$m\ddot{x} = mf(t) - 2\beta m\dot{x} - m\omega_0^2 x,$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad (22)$$

– дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний.

Найти $x(t)$ – величину отклонения центра масс системы и $v(t) = \dot{x}(t)$ – скорость его перемещения в любой момент времени $t > 0$, если движение начинается из состояния

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0. \qquad (23)$$

Дать характеристику величин $x(t)$, $v(t)$, построить график $x(t)$, $v(t)$ во втором случае.

11.1.3.2. Данные задачи

Первый случай: $\beta = \dfrac{12-n}{72+N}$, $\omega_0 = \beta\dfrac{10-n}{10+2n}$,

$$f(t) = \frac{10+N}{1+n}\sin\omega t + \frac{20-N}{2+n}\cos\omega t,\ \omega = 2k.$$

Второй случай: $\beta = \omega_0 = \dfrac{12-n}{72+N}$, $f(t) = \dfrac{1+N}{1+k}e^{\lambda t}$, $\lambda = -\beta$.

Третий случай:

$$\beta = \frac{12-n}{72+N},\ \omega_0 = \beta\frac{2n+1}{2n-1},\ f(t) = \left(n\cdot N - \frac{N}{n} + \frac{k}{N}\right)e^{\lambda t},\ \lambda = -2\beta.$$

Здесь n – последняя цифра из номера группы ($n = 1, 2, 3, 4, 5$), N – номер студента по журналу ($N = 1, 2, 3, \ldots$), k – предпоследняя цифра из номера группы.

11.1.3.3. Порядок решения задачи

1. Найти значения параметров β, ω_0 и функцию $f(t)$.

2. Записать ЛНДУ, подставляя в уравнение (22) значения параметров и правую часть $f(t)$.

3. Записать общее решение в виде

$$x(t) = X(t) + \tilde{x}(t), \tag{24}$$

где $X(t)$ – общее решение соответствующего ЛОДУ, а $\tilde{x}(t)$ – частное решение ЛНДУ.

4. Составить характеристическое уравнение ЛОДУ:

$$k^2 + 2\beta k + \omega_0^2 = 0$$

и найти его корни $k_1,\ k_2$.

5. Записать общее решение ЛОДУ.

6. По виду $f(t)$ найти вид частного решения $\tilde{x}(t)$, подставить $\tilde{x}(t)$ в ЛНДУ и найти неопределенные коэффициенты A, B.

Найти значения неопределенных коэффициентов A, B из системы

$$\begin{cases} a_{11}A + a_{12}B = c_1, \\ a_{21}A + a_{22}B = c_2 \end{cases}$$

по формулам Крамера:

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta}, \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_A = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_B = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}.$$

7. Записать общее решение ЛНДУ, подставив $X(t)$ и $\tilde{x}(t)$ в выражение (24).

8. Найти производную $\dot{x}(t)$ от общего решения $x(t)$ и, используя начальные условия (23), получить систему двух линейных уравнений относительно произвольных постоянных C_1, C_2

$$\begin{cases} b_{11}C_1 + b_{12}C_2 = d_1, \\ b_{21}C_1 + b_{22}C_2 = d_2. \end{cases}$$

Найти значения C_1, C_2 из системы по формулам Крамера:

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_{C_2}}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} d_1 & b_{12} \\ d_2 & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} b_{11} & d_1 \\ b_{21} & d_2 \end{vmatrix}.$$

9. Подставить полученные значения C_1, C_2 в общее решение. В результате будет найдено решение задачи – частное решение ЛНДУ, удовлетворяющее начальным условиям. Функция $x(t)$ показывает величину отклонения центра масс системы в момент времени t.

10. Найти $v(t) = \dot{x}(t)$ – скорость перемещения центра масс в момент времени t.

11. Дать характеристику полученного решения $x(t)$ и скорости $v(t)$, во втором случае построить их графики.

Задача решается для каждого случая отдельно, следуя приведенному порядку выполнения работы. **Все вычисления следует выполнять с точностью 0,00001.**

РАЗДЕЛ. V. РЯДЫ

Тема 12. Числовые ряды

12.1. Сходимость знакоположительных рядов

12.1.1. Вопросы для самостоятельного изучения

12.1.1.1. Числовой ряд, сумма ряда, свойства рядов

Рассмотрим бесконечную последовательность чисел

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$$

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{25}$$

называется **числовым рядом**.

Числа u_1, u_2, ... называются **членами ряда**, u_n – **общим (n-ым) членом ряда**.

Задание ряда равносильно заданию общего члена ряда в виде функции $u_n = f(n)$ от порядкового номера n.

Сумма конечного числа первых членов ряда называется **частичной суммой**. Частичные суммы ряда имеют вид:

$S_1 = u_1$ – первая частичная сумма,

$S_2 = u_1 + u_2$ – вторая частичная сумма,

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ – третья частичная сумма,

…………………………………………………

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ – n-ая частичная сумма.

Из частичных сумм можно построить последовательность

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ ...,\ S_n,\ ... \tag{26}$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **расходящимся**, если последовательность частичных сумм ряда не имеет конечного предела.

12.1.1.2. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена равен нулю при $n \to \infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{27}$$

Следствие (достаточный признак расходимости ряда)

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – расходится.

12.1.1.3. Признаки сходимости знакоположительных рядов

1. Признак сравнения (в общей форме).

Если для двух знакоположительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ выполняется неравенство $u_n \le v_n$ для любых n, то:

1) из сходимости большего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость меньшего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) из расходимости меньшего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость большего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

1 (а). Признак сравнения (в предельной форме).

Если для двух знакоположительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a, \tag{28}$$

причем $a\neq 0$, $a\neq\infty$, то оба ряда либо сходятся, либо расходятся.

2. Признак Даламбера

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D, \tag{29}$$

то:

1) если $D<1$, то ряд сходится;

2) если $D>1$, то ряд расходится;

3) если $D=1$, то это неопределенный случай.

3. Признак Коши

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ существует предел

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}, \tag{30}$$

то:

1) если $k<1$, то ряд сходится;

2) если $k>1$, то ряд расходится;

3) если $k=1$, то это неопределенный случай.

4. Интегральный признак

Функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(n)=u_n$, для любых n, называется **производящей** функцией ряда.

Если знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ имеет монотонно убывающую производящую функцию $f(x)$ на $[1,\infty)$, то:

1) из сходимости несобственного интеграла $J=\int_1^{\infty}f(x)dx$ следует сходимость ряда;

2) из расходимости несобственного интеграла $J = \int_1^{\infty} f(x)dx$, следует расходимость ряда.

12.1.2. Контрольные вопросы

9) Что называется числовым рядом?
10) Что называется частичными суммами числового ряда?
11) Дайте определение сходящегося и расходящегося числового ряда.
12) Какой ряд называется рядом геометрической прогрессии, и при каком значении знаменателя q он сходится?
13) Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
14) Сформулируйте достаточный признак расходимости ряда.
15) Будет ли необходимый признак достаточным?
16) Сформулируйте признак сравнения в общей и предельной формах.
17) Сформулируйте признаки Даламбера и Коши.
18) Сформулируйте интегральный признак сходимости ряда.

12.2. Исследование сходимости знакочередующихся рядов

12.2.1. Вопросы для самостоятельного изучения

12.2.1.1. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница

Ряды вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^{n} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} u_n,$$

где все $u_n > 0$, называются **знакочередующимися рядами**.

Признак Лейбница (сходимости знакочередующегося ряда).

Пусть знакочередующийся ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

удовлетворяет условиям:

1) $u_1 > u_2, > u_3 > \ldots$ – монотонно убывают,

2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Тогда ряд сходится, а его сумма S удовлетворяет неравенствам: $S > 0,\ \ S < u_1$.

12.2.1.2. Признак абсолютной сходимости знакопеременного ряда

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого имеют произвольные знаки. Такой ряд называется **знакопеременным.**

Составим ряд из модулей членов знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

Признак абсолютной сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд из модулей членов знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то сходится и сам знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд из модулей его членов.

Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если он сам сходится, а ряд из модулей его членов расходится.

12.2.1.3. Схема исследования знакочередующихся рядов на сходимость

1) Для данного знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ ($u_n \geq 0$) составим ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и исследуем его на сходимость, используя признаки сходимости знакоположительных рядов.

2) В зависимости от поведения ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ дальнейшее исследование разделяется на случаи:

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ **сходится абсолютно**;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – расходится и при этом не выполняется необходимое условие сходимости, то есть $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$ (это возможно если расходимость ряда доказана по признакам расходимости, Даламбера, Коши); тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ – **расходится**;

в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – расходится, но необходимое условие сходимости выполняется (признаки сравнения, интегральный), то к знакочередующемуся ряду надо применить признак Лейбница.

3) (Только в случае в)) Проверим выполнение условий признака Лейбница

1) $u_1 > u_2, > u_3 > \ldots$,

2) $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Если условия выполняются, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ – **сходится условно**.

12.2.2. Контрольные вопросы

1) Какой ряд называется знакочередующимся?
2) Сформулируйте признак Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда.
3) Сформулируйте признак абсолютной сходимости знакочередующегося ряда.
4) Какой знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся?
5) Какой знакочередующийся ряд называется условно сходящимся?
6) Приведите последовательность исследования знакочередующихся рядов на сходимость (схему исследования)?

Тема 13. Функциональные ряды

13.1. Нахождение интервала и радиуса сходимости степенных рядов

13.1.1. Вопросы для самостоятельного изучения

13.1.1.1. Функциональные ряды

Ряд, членами которого являются функции

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

называется **функциональным рядом**.

Точка x_0, в которой функциональный ряд сходится, называется **точкой сходимости** ряда.

Множество точек сходимости ряда называется **областью сходимости** ряда.

В каждой точке области сходимости определена сумма ряда. Следовательно, на области сходимости ряда определена функция $S(x)$, являющаяся суммой функционального ряда

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...=S(x).$$

13.1.1.2. Область сходимости степенного ряда

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n. \quad (31)$$

Область сходимости степенного ряда имеет вид интервала $(x_0-R,\ x_0+R)$, симметричного относительно точки x_0 (рис. 13.1.1), включая, быть может, его концы.

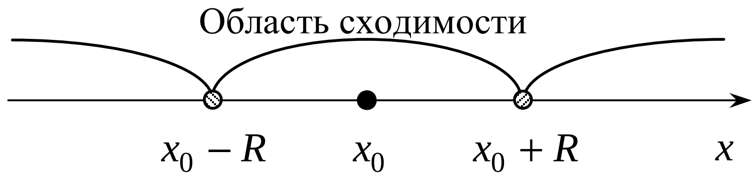


рис. 13.1.1

Интервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ называется **интервалом сходимости** степенного ряда (31), а число R называется **радиусом сходимости** ряда

Замечания:

1) В точках $x_0 - R,\ x_0 + R$ степенной ряд может сходиться или расходиться, что требует дополнительного исследования.

2) Если $R = 0$, то областью сходимости ряда является единственная точка x_0.

3) Если $R = \infty$, то областью сходимости ряда является вся числовая ось $(-\infty, \infty)$.

13.1.1.3. Схема нахождения области сходимости степенного ряда (31)

1) Составим ряд из модулей членов степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x - x_0|^n$.

2) К полученному знакоположительному ряду применим признак Даламбера (или Коши)

$$D(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x - x_0|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x - x_0|^n} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

3) Так как ряд сходится, если $D < 1$, то для нахождения области сходимости степенного ряда решаем неравенство

$$D(x) < 1 \Rightarrow |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1.$$

В результате решения неравенства получим интервал сходимости ряда

$$(x_0 - R,\ x_0 + R),$$

где $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (по признаку Даламбера) или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (по признаку Коши).

4) Исследуем ряд на концах интервала в точках

$$x = x_0 - R,\ \ x = x_0 + R.$$

5) Запишем ответ.

13.1.1.4. Ряд Тейлора

Функция $f(x)$ называется **аналитической** в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки она является суммой степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Если функция $f(x)$ является аналитической в точке x_0, то имеет место равенство

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \end{gathered} \tag{32}$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (32) называется **рядом Тейлора** функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 (или по степеням $(x - x_0)$). Равенство (32) называется разложением функции $f(x)$ в степенной ряд.

Если $x_0 = 0$, то равенство (32) примет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

и называется **рядом Маклорена** функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

13.1.1.5. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды

Известны разложения в степенной ряд в окрестности точки $x_0 = 0$ (или по степеням x) следующих элементарных функций, а также интервалы, на которых эти разложения имеют место:

1) разложение функции e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ (-\infty, \infty);$$

2) разложение функции $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, (-\infty, \infty);$$

3) разложение функции $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., \ (-\infty, \infty);$$

4) разложение функции $(1+x)^m$ – **биномиальный ряд**

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ..., \ (-1, 1);$$

5) разложение функции $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ..., \ (-1, 1].$$

Если m – целое положительное число, то биномиальный ряд превращается в конечную сумму, называемую **биномом Ньютона**, который можно записать в виде

$$(a+b)^m = a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + ... + b^m.$$

Здесь числа $C_m^1, C_m^2, ...,$ называемые биномиальными коэффициентами, являются **сочетаниями** и вычисляются по формуле

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Приведенные разложения можно использовать для разложения более сложных функций в ряд по степеням x.

13.1.2. Контрольные вопросы

1) Какой ряд называется функциональным? Что называется точкой сходимости, областью сходимости ряда?
2) Что представляет собой сумма функционального ряда?
3) Какой ряд называется степенным?
4) Сформулируйте теорему Абеля и объясните ее геометрический смысл.
5) Какой вид имеет область сходимости степенного ряда?
6) Приведите схему нахождения области сходимости степенного ряда.
7) Какая функция называется аналитической в точке x_0?
8) Как записывается ряд Тейлора аналитической функции $f(x)$ в окрестности точки x_0?
9) Какой вид имеет ряд Маклорена функции $f(x)$ по степеням x?

10) Запишите разложения в ряд по степеням x функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$.

13.1.3. Практическое задание для самостоятельной работы

Задание содержит 4 задачи. Каждая задача имеется в 35 вариантах. Номер задачи состоит из двух чисел: первое число – порядковый номер задачи, второе число – номер варианта.

Студент решает ту задачу, номер варианта которой совпадает с его номером по списку в журнале, подставляя значение параметра $k=1, 2, 3, ...$ – сумма последних двух цифр номера группы.

Задача 1.

Исследовать на сходимость числовые ряды:

Варианты

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+1}{n^k+3n+2}$; б) ;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^k}{n^{k+1}+3}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(k+1)^n\left(n^3+1\right)}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^k}{(k+1)^n n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{kn+2^k}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n+k)(3n+k)}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(k+1)^n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-k^2}{n^k+3n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{kn^2+1}{n!(n+k)}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k^n(2n+1)}{(n+k)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{kn+7}{(2n+k)(3n+k)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2k}{n(kn+1)}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+kn+k^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{2^{n+k}(n+2k)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{kn-1}{n^2+2n+3k^2}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2\left(n^2+k^2\right)}{k^2n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(n^3+kn+k+1\right)}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(k+1)n+(k+2)}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{2^k\left(n^2+1\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{k^2+n^3k}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+k}{n\left(n^2+k^2\right)}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2k}{(n+k)\left(n^2+1\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n+k)!}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+k)^3}{(n+k)^2+1}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^2}{(2+k)^n\cdot(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+k}{n(n+k)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+2k}{kn+1}\right)^n$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\left(n^2+k^2\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{(n+k)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(n+k)(n+2k)}$.

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2k-1)^{n+1}(n+k)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+5k}{2n+3k}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+k)(n+2k)}{n^3+k^2}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+k^2}{n^2\left(n^2+4k^2\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+k^2}{n^3+k^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+k)}{k(n+1)!}3^n$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2k}{2^{n+k}\left(n^2+1\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+k^2}{n!(n+k)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+5}{(n+k)(n+2k)}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+k}{(kn+1)(n+k)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n n!}{n^2+k^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+k)}{k^2n^2+1}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)\cdot 2^{n+k}}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{kn+k^2+1}{n(n+k)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(n+2)}{(n+k)^3}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n+k}}{(2n+k)\left(n^2+k^2\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(n+k)}{3^n(2n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(-1)^n}{\left(\sqrt{n}+2k\right)}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(kn+2)(2n+k)}{(1+k)^n(n+2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+2nk)}{2n^2+n+3k}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^2+k^2}}{n^3+2n+k}$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+k}{n^3+k^2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+k)^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{kn+1}{n^2+k}$.

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+k^2}{(n+k)(n+3k)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)!n^k}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2kn+3k^2}$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+2)^n}{\left(n^2+k^2\right)n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+k)}{3n^2+2k}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\left(n^2+k^2\right)\left(n^2+2k^2\right)}$.

21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n^2(n+k)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+k)^2}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+k+1}{n^2+k}$.

22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k^n n!}{n^k+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+2n}{6n^2+k}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+k)(n+2k)}{\left(n^2+k^2\right)\left(n^2+4k^2\right)}$.

23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+6k)}{(n+k)(n+2k)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n\left(n^k+1\right)}{(k+1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n+k}{n^2+kn+1}$.

24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k^{n+1}}{n^k+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(n+k)}{n^2\left(n^2+k\right)}$.

25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+k}{k^2n^2+2kn+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+k}{kn+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!(n+k)^{10}}$.

26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^2}{(n+1)!}\cdot 2^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(kn+2)}{2n^2+k+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{(n+k)(n+7)}$.

27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\left(n^3+k^2\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2(n+k)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+k)^3+1}{(n+k)^2+1}$.

28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+n+k)}{n^2+kn+2k^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-k)^2+k^2}{(n+k)!\cdot 5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{kn-1}{n^2+k^2}$.

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(6n-k)}{(n+k-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+kn+1}{n^3+2n+k^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+k^2}{n^4+k}$.

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+k)}{n^3+k^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{7n^2+k}{n+2k}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n(2n+k)}{(n+k)!}$.

31. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2k^2}{2^n(n+k)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{6k+n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+k}{kn^2+n+3}$.

32. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n^{2k}+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n(n+k)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+k^2)}{n(n+k)(n+2k)}$.

33. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2k)^n}{(n+k)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+k^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3+kn^2+2}{2n^3+k^2n+1}$.

34. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+k}}{n^k+k}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+k}{(n^2+1)(kn+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6n-k}{2n^2+k}$.

35. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+k)}{n^2+k^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+k}{(n+k)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^k}{(k+1)^n}$.

Задача 2.

Найти область сходимости степенного ряда

Варианты

N		N	
1	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+k-3)^n}{3^n(n^2+k^2)}$	2	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{k^n(n+1)(n+k)}$
3	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-k+4)^n}{n(n+k)4^n}$	4	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n(kn+1)}{2^n(n+2)}$
5	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2k)(x-3)^n}{(n+k)(k+1)^n}$	6	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{2^n(kn+3)}$
7	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)^2}{(2n+k)}(x-k)^n$	8	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+k+1)^n}{(k+1)^n(n+1)}$

9 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n(n+2k)}{(n+k)^3}(x-k)^{2n+1}$

10 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(12-k)^n(kn+3)(3n+k)}$

11 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+2-k)^n(n+k)^3}{2n+k}$

12 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+k-2)^{2n}}{(n^2+kn+1)}$

13 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+k}{n^2+k^2}\cdot\frac{(x-5)^n}{(2k+5)^n}$

14 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3+kn+1}{n^4+kn^2+1}\left(\frac{x-k}{2k}\right)^n$

15 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^2n^2+2n+k}{3n+2}\cdot\frac{(x-1)^n}{(k+1)^n}$

16 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{(x-2k+5)^n}{n^3+k^3}$

17 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{(n^2+2kn+3)\cdot(12-k)^n}$

18 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n^k+1)k^n}$

19 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn+1)(x-k)^n}{(n+k+1)(12-k)^n}$

20 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{4^{n+1}(2n+3k)}$

21 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3+k)^n}{3^n(2n+k)^2}$

22 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+k)^2}{(n+2k)^2}\cdot(x-k)^{2n}$

23 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn+1)x^{n+1}}{(k^2n^2+1)k^n}$

24 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n^k+1)(x+k)^{n+1}}{n^{k+1}+2}$

25 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}(n+k+1)}{9^n(1+kn)(1+k^2n^2)}$

26 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k^2n^2+1)(x-k)^n}{(n+k)2^{n+1}}$

27 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+k)^{2n}}{(n^3+k^2n+k^3)9^n}$

28 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+1)n+k}{n^2+kn+(k+1)}\cdot\frac{(x-k)^n}{(k+1)^n}$

29 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^k+k}{n^{k+1}+(k+1)}\cdot x^{2n+1}$

30 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+1)(x+k)^{n+1}}{(2n^3+1)\cdot k^n}$

31 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+k)(n+2k)}{n+3k}\cdot(x-1)^{n+3}$

32 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2k)^n\cdot(kn+2)}{(k+2)^n(2n+k)}$

33 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+k)(x-1)^n}{3^n}$

34 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2k)^n(n+3)}{(n^2+k)2^n}$

35 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+k^2}{n^3+k}\cdot(x-k)^{2n+1}$

Задача 3.

Найти три члена разложения в ряд функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0:

Варианты

1 $f(x) = \dfrac{x+k}{x^2+k}$, $x_0 = 1$

2 $f(x) = xe^{k-x}$, $x_0 = k$

3 $f(x) = x^2 + x\sin(k-x)$, $x_0 = k$

4 $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+k}$, $x_0 = 2$

5 $f(x) = x^3 + x\ln(k-x)$, $x_0 = k-1$

6 $f(x) = 1 - 2x^3 + x^2\cos(k-x)$, $x_0 = k$

7 $f(x) = \dfrac{x^2}{k+x^2}$, $x_0 = -k$

8 $f(x) = 2x^2 - xe^{k+x}$, $x_0 = -k$

9 $f(x) = \dfrac{1+x}{(k-x)^2}$, $x_0 = k+1$

10 $f(x) = \left(3 + e^{k-x}\right)^2$, $x_0 = k$

11 $f(x) = x\ln(2x-k)$, $x_0 = k$

12 $f(x) = 2x\cos(k+x) - 7x^2$, $x_0 = -k$

13 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+k}}$, $x_0 = -k+1$

14 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2k^2 - 1}$, $x_0 = 1$

15 $f(x) = \dfrac{1}{3-x-x^2}$, $x_0 = k$

19 $f(x) = 3x^2 - x\sin(k+x)$, $x_0 = -k$

20 $f(x) = \ln(4-k+2x)$, $x_0 = k$

21 $f(x) = 4x^3e^{x+k}$, $x_0 = -k$

22 $f(x) = \sqrt{16-3k+3x}$, $x_0 = k$

23 $f(x) = \dfrac{k}{(3+x)^3}$, $x_0 = k$

24 $f(x) = 3x^2 - k\sin(k+x)$, $x_0 = -k$

25 $f(x) = x^2 - xe^{k-x}$, $x_0 = k$

26 $f(x) = x\ln(6-k+x)$, $x_0 = k$

27 $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+x-k}$, $x_0 = k$

28 $f(x) = \left(2 + \ln(k+x)\right)^2$, $x_0 = -k+1$

29 $f(x) = 3x^2 - (k-x)\cos(k-x)$, $x_0 = k$

30 $f(x) = x^2 - x + e^{k^2-x^2}$, $x_0 = k$

31 $f(x) = \dfrac{x-2k}{x^2+k}$, $x_0 = 1$

32 $f(x) = k + x^2 - xe^{k+x}$, $x_0 = -k$

33 $f(x) = (x+k)\cos(x-k) + 2$, $x_0 = k$

16 $f(x)=(1+x)\sin(k+x)+x^2,$ $x_0=-k$

17 $f(x)=\dfrac{x^2+k}{x^3+k},\ x_0=1$

18 $f(x)=x^2e^{k-x},\ x_0=k$

34 $f(x)=(x+k)\sqrt{x-k},\ x_0=4+k$

35 $f(x)=k+x^2+\left(x^2-1\right)\sin kx,$ $x_0=0$

Задача 4.

Используя известные разложения, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ разложить в степенные ряды и найти их область сходимости:

Варианты

N	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	$\frac{1}{kx}\sin\left(kx^2\right)$	$\ln\left(1-\frac{x}{k+1}\right)$
2	xe^{-kx^2}	$kx\cos\left(\frac{x^2}{k+1}\right)$
3	$\frac{1}{kx^2}\sin\left(kx^3\right)$	$\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{k+1}\right)$
4	$\frac{1-e^{kx^2}}{x}$	$x^3\cos\left(\frac{x}{k+1}\right)$
5	$\frac{1}{x^2}\sin\left[(2k-5)x^2\right]$	$\frac{x^3}{k}e^{-kx}$
6	$\frac{x}{7+k}\cos(kx)$	$x\ln\left(1-\frac{x^2}{(k+1)}\right)$
7	$\frac{x}{k+1}e^{-(12-k)x^2}$	$\frac{(2k+1)}{x^2}\sin\left(\frac{x^2}{2k+1}\right)$
8	$x^3\ln\left(1+\frac{x}{5-2k}\right)$	$\frac{x^2}{k+1}e^{kx^3}$
9	$\frac{x}{k}\cos\left(\frac{x^2}{k}\right)$	$\frac{x^2}{k}\ln(1-kx)$
10	$\frac{k}{x}\sin\left(kx^2\right)$	$xe^{-\frac{x^2}{k}}$
11	$\frac{k}{x^2}\sin\left(kx^3\right)$	$x\ln\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)$

12	$\frac{kx-\sin(kx)}{x^3}$	xe^{-kx^3}
13	$\frac{1-\cos\left(\frac{x^2}{k}\right)}{x}$	$\frac{2k+3}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2k-5}\right)$
14	$\frac{-1+e^{kx^2}}{x^2}$	$\frac{x^3}{k}\cos\left(\frac{x^3}{k}\right)$
15	$\frac{1}{kx}\sin(kx^3)$	$\frac{k}{x}e^{-\frac{x^2}{k}}$
16	$\frac{1-\cos(kx^2)}{k^2x}$	$\frac{x}{k}\ln(1+(k+1)x)$
17	$\frac{x}{k}e^{-kx^3}$	$\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{x^2}{k}\right)$
18	$\frac{x^2}{k}\ln(1+kx^2)$	$\frac{1-e^{-kx^2}}{k^2x}$
19	$2-2\cos(kx^2)$	$\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{k+1}\right)$
20	$\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{kx^3}{k+1}\right)$	$x^k e^{-\frac{x^3}{k}}$
21	$\frac{x}{k}\cos\left(\frac{x^2}{k}\right)-\left(\frac{x}{k}\right)$	$x^2\ln\left(1+\frac{x^3}{k^3}\right)$
22	$\frac{k}{x^k}\sin(x^{2k})$	$e^{(k+1)x^4}-1$
23	$\frac{x}{4+k}\sin(kx^4)$	$\frac{12+2k}{x}\ln\left(1+\frac{kx^2}{12+2k}\right)$
24	$\frac{2e^{-kx^3}-2}{kx}$	$\frac{x^{1+k}}{1+k}\sin(x^{1+k})$
25	$\frac{\cos(kx^3)-1}{x^2}$	$e^{-kx^2}kx^2$
26	$\frac{1-e^{-\frac{k}{k+1}x^2}}{x}$	$\frac{k}{x}\ln\left(1-\frac{x}{k^2}\right)$

27	$\dfrac{\ln\left(1+kx^3\right)}{k^2\cdot x}$	$\dfrac{kx^3}{2}\sin\left(kx^2\right)$
28	$\dfrac{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}{2k}$	$\dfrac{x^k}{k}\cos\left(\dfrac{x^3}{k}\right)$
29	$\dfrac{k+1}{x}\ln\left(1-kx^3\right)$	$\dfrac{x^3}{k}\sin\left(2x^k\right)$
30	$\dfrac{k}{x}\sin(k+1)x^3$	$x^{12-k}\left(1-e^{-kx^2}\right)$
31	$-kx^3+x\ln\left(1+kx^2\right)$	$\dfrac{1-\cos\left(kx^2\right)}{x^4}$
32	$\dfrac{e^{kx^2}-1}{x^2}$	$\dfrac{\sin\left(\dfrac{x^2}{k}\right)}{(k+1)x}$
33	$kx\sin\left(\dfrac{x^3}{k^2}\right)$	$\dfrac{\ln\left(1+k^2x^2\right)}{kx^2}$
34	$kx\cos\dfrac{(k+1)x^2}{k}$	$\dfrac{k+1}{x}\left(1-e^{-kx}\right)$
35	$\dfrac{k+1}{x}\sin\dfrac{x^4}{k+1}$	$\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{k^2x}{2}\right)$

РАЗДЕЛ. VI. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тема 14. Вычисление определителей

14.1. Вопросы для самостоятельного изучения

14.1.1. Определения

Матрицей называется прямоугольная **таблица** чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов. Каждый **элемент** a_{ij} матрицы имеет двойной номер: i – номер строки, j – номер столбца на пересечении которых стоит этот элемент. Коротко матрицу можно записать в виде $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

Если $m=n$, то матрица называется **квадратной матрицей *n*-го порядка**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для квадратной матрицы вводится понятие определителя (детерминанта) матрицы.

Определителем матрицы A n-го порядка называется число

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

вычисляемое с помощью определенного правила.

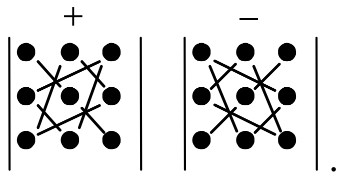
Определитель второго порядка вычисляется по следующему правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ , \ .$$

Определитель третьего порядка вычисляется по следующему правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \ .$$

Для вычисления определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом Саррюса («треугольников»), имеющего вид



Произведение элементов, вычисленных по схеме « **+ »,** входят в сумму со своими знаками, а по схеме « **–** » с противоположными знаками.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется **определитель,** полученный из данного путем вычеркивания i – ой строки и j – го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}**.**

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

14.1.2. Свойства определителей

Свойства справедливы для определителей любого порядка.

Свойство 1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, а столбцы строками, сохраняя их порядок

Свойство 2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Свойство 3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю

Свойство 4. Если все элементы строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя

Свойство 5. Определитель, имеющий нулевую строку (нулевой столбец), равен нулю

Свойство 6. Определитель не изменится, если ко всем элементам некоторой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число

14.2. Контрольные вопросы

1) Что называется матрицей, определителем?
2) Запишите правило вычисления определителей второго и третьего порядков.
3) Что называется минором, алгебраическим дополнением?
4) Как формулируется теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца?
5) Сформулируйте свойства определителей.

Тема 15. Действия над матрицами

15.1. Вопросы для самостоятельного изучения

15.1.1. Действия над матрицами

Суммой матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},$$

полученная сложением элементов с одинаковыми индексами.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число k называется матрица $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$, полученная умножением всех элементов матрицы A на число k.

Произведением матрицы – строки $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ на матрицу-столбец $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, имеющих одинаковое число элементов, называется число

$$AB=(a_1,a_2,\dots,a_n)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n \quad .$$

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B=(b_{ij})_{n\times k}$, удовлетворяющих условию: **число столбов матрицы** A **равно числу строк матрицы** B, называется матрица $AB=C=(c_{ij})_{m\times k}$, где,

$$\mathrm{c}_{ij}=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})\cdot\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj} \quad .$$

Матрица AB имеет m строк и k столбцов.

15.1.2. Обратная матрица

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если определитель матрицы не равен нулю $|A|\neq 0$.

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а остальные нулю $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ называется **единичной** матрицей.

Для любой квадратной матрицы A и единичной матрицы E, имеющих одинаковый порядок, имеем $A\cdot E=E\cdot A=A$.

Если у матрицы A строки заменить столбцами, а столбцы строками, сохраняя их порядок, то получится матрица A^T, которая называется **транспонированной к матрице** A. Например,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Пусть A – квадратная матрица. **Обратной к матрице** A называется матрица A^{-1}, удовлетворяющая условию $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Всякая невырожденная квадратная матрица имеет обратную.

Способ нахождения обратной матрицы A^{-1} для квадратной невырожденной матрицы $A=(a_{ij})_{n\times n}$:

1) найти определитель $|A|$ матрицы, убедиться, что $|A|\neq 0$;

2) найти алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ и составить матрицу $\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$;

3) найти транспонированную к $\tilde{A}$ матрицу $\tilde{A}^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$;

4) найти обратную матрицу по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

15.1.3. Ранг матрицы

Рангом матрицы называется целое положительное число r, равное наибольшему порядку минора матрицы, отличного от нуля.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются следующие преобразования:

а) умножение строки на число;

б) перемена строк местами;

в) прибавление строки, умноженной на число к другой строке.

Элементарные преобразования матрицы не меняют ранг матрицы. Таким образом, если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то пишут $A \sim B$ и их ранги равны $r(A) = r(B)$.

Способ нахождения ранга матрицы A:

1) Матрицу A с помощью элементарных преобразований привести к треугольному виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = B;$$

2) Ранг матрицы B равен числу ненулевых строк матрицы $r(B) = k$, так как определитель k - го порядка, выделенный линией, отличен от нуля, а определители большего порядка равны нулю;

3) $r(A) = r(B) = k$.

15.2. Контрольные вопросы

1) Что называется матрицей?
2) Что называется суммой матриц, произведением матрицы на число?
3) Какие матрицы можно умножать?
4) Как найти произведение матриц?
5) Какая матрица называется невырожденной?
6) Что называется обратной матрицей?
7) Сформулируйте правило нахождения обратной матрицы.
8) Что называется минором матрицы?
9) Что называется рангом матрицы?
10) Какие преобразования матрицы называются элементарными преобразованиями?
11) Сформулируйте способ нахождения ранга матрицы.

Тема 16. Решение систем линейных алгебраических уравнений

16.1. Вопросы для самостоятельного изучения

16.1.1. Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

находится по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \; \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Данные формулы для решения системы называются **формулами Крамера** (правилом Крамера). Оно (правило) распространяется на систему n линейных уравнений с n неизвестными.

16.1.2. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Составим три матрицы:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрица-столбец решений,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Систему уравнений, используя введенные матрицы, можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

или коротко $AX = B$.

Предположим, что матрица системы A невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A^{-1}, на которую умножим левую и правую часть уравнения $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

Так как $A^{-1}A = E$, $EX = X$, то получим

$$X = A^{-1}B .$$

Матричный метод решения системы линейных уравнений:

1) выписать матрицы A, B, X и систему уравнений в матричной форме $AX = B$;
2) найти $|A|$, убедиться, что $|A| \neq 0$ и найти матрицу A^{-1};
3) найти матрицу – столбец решений по формуле $X = A^{-1}B$, выписать значения x, y, z.

16.1.3. Метод Гаусса

Были рассмотрены два метода решения системы линейных уравнений: метод Крамера, матричный метод. Они применяются к системам, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Рассмотрим ещё один метод – **метод Гаусса** (метод исключения неизвестных) решения системы m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m, \end{cases} \qquad (33)$$

причем возможны случаи $n = m,\ n < m,\ n > m$.

Две системы называются **равносильными**, если они имеют одни и те же решения.

16.1.4. Метод Гаусса решения системы (33).

1) Составить расширенную матрицу $\overline{A}$, добавив к основной матрице A столбец свободных членов
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{array}\right).$$

2) С помощью элементарных преобразований привести матрицу $\overline{A}$ к треугольному виду
$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} & g_1 \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & \dots & b_{2n} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} & g_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \overline{B}.$$

3) Составить систему линейных уравнений с расширенной матрицей $\overline{B}$, которая равносильна системе (33). Найти из этой системы последовательно $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_2, x_1$ – решения заданной системы.

Вопрос о существовании решения системы (33) рассмотрен в следующей теореме.

16.1.5. Теорема Кронекера–Капели

Система линейных уравнений (33) имеет решение (система совместная), если ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы $r(A) = r(\overline{A})$, причем:

1) если $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система имеет единственное решение;
2) если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система имеет множество решений.

16.2. Контрольные вопросы

1) Сформулируйте правило Крамера решения систем линейных уравнений.
2) Сформулируйте матричный метод решения систем линейных уравнений.
3) В чем состоит метод Гаусса? Сформулируйте схему его применения.
4) Сформулируйте теорему Кронекера-Капели.

16.3. Практическое задание для самостоятельной работы

Решить систему уравнений тремя методами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 14x_3 = 6 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 11 \\ 5x_1 - 21x_2 - 27x_3 = -5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -21 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 16 \\ 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 22 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 23 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 12 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 9 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 12x_1 - 13x_2 - 4x_3 = -10 \\ 7x_1 - 9x_2 - 11x_3 = 0 \\ 12x_1 - 17x_2 - 15x_3 = -7 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 5x - 19x - x = 26 \\ 2x - 5x - x = 6 \\ 8x - 31x - 4x = 35 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = -1 \\ 13x_1 + x_2 + 16x_3 = 5 \end{cases}$

РАЗДЕЛ. VII. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Тема 17. Векторы. Линейные операции над векторами

17.1. Вопросы для самостоятельного изучения

17.1.1. Определения

Вектором называется отрезок, которому приписано определенное направление (рис. 17.1.1), т.е. указаны начало и конец отрезка. Обозначается: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$, где A – начало, B – конец отрезка.

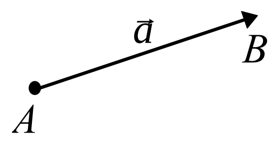


рис. 17.1.1

Модулем (длиной) вектора называется длина отрезка и обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, модуль которого равен единице, называется **единичным вектором** или **ортом**.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначается $\vec{a} \| \vec{b}$. При этом коллинеарные векторы могут быть **одинаково направленными** (рис. 17.1.2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ или **противоположно направленными** (рис. 17.1.3) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

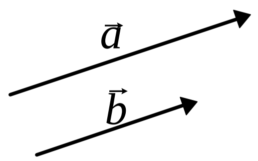


рис. 17.1.2

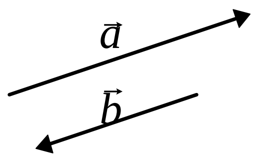


рис. 17.1.3

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **равны** $\vec{a} = \vec{b}$, если: 1) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

17.1.2. Линейные операции над векторами

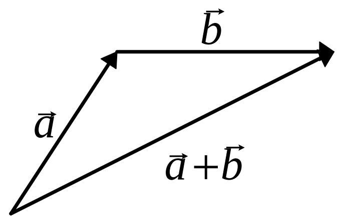


рис. 17.1.4

1. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, построенный:

а) **по правилу треугольника** (рис. 17.1.4) – вектор $\vec{a}+\vec{b}$ проведен из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если конец вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\vec{b}$ совмещены; или

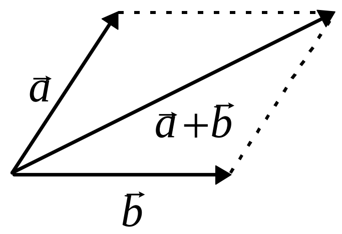


рис. 17.1.5

б) **по правилу параллелограмма** (рис. 17.1.5) – вектор $\vec{a}+\vec{b}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах.

Свойства: а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; б) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

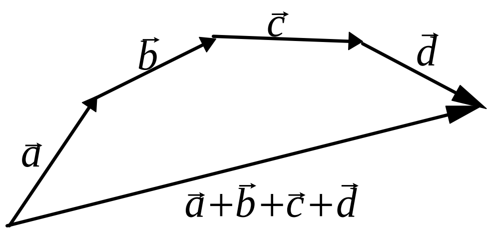


рис. 17.1.6

2. Сумма $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ нескольких векторов строится по **правилу многоугольника** (рис. 17.1.6) - это вектор, замыкающий ломаную линию, составленную из слагаемых векторов, его начало совпадает с началом первого вектора $\vec{a}$, а конец - с концом последнего вектора $\vec{d}$.

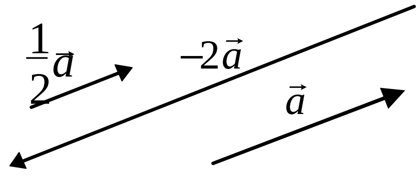


рис. 17.1.7

3. Произведением вектора $\vec{a}$ **на число** λ называется вектор $\lambda\vec{a}$ (рис. 17.1.7), удовлетворяющий условиям:

1) $\left|\lambda\vec{a}\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$;

2) $\lambda\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\lambda>0$ и $\lambda\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\lambda<0$.

Свойства: а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; б) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$; в)$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.

4. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$, который можно построить двумя способами:

а) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 17.1.8) б) $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$ (рис. 17.1.9)

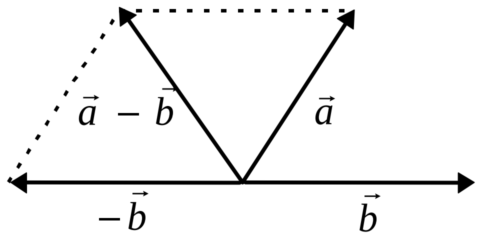


РИС. 17.1.8

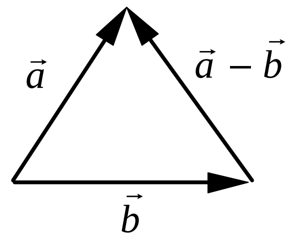


РИС. 17.1.9

17.1.3. Координаты вектора, линейные операции над векторами в координатах

Ось Ou – это прямая с заданным направлением, масштабом и началом отсчета O. **Единичный вектор** $\vec{e}$, лежащий на оси, направление которого совпадает с направлением оси, называется **ортом** направления оси.

Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$. Найдем проекции точек A, B на ось Ou (рис. 17.1.10) – точки $A' = \text{пр}_{Ou} A$, $B' = \text{пр}_{Ou} B$. Построим вектор $\overrightarrow{A'B'}$.

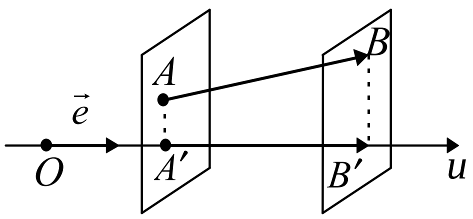


РИС. 17.1.10

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ **на ось** Ou называется число

$$\text{Пр}_{Ou}\overrightarrow{AB} = \begin{cases} \left|\overrightarrow{A'B'}\right|, \text{ если } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \vec{e}, \\ -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, \text{ если } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \vec{e}. \end{cases}$$

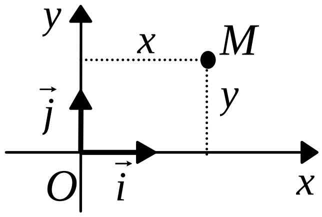


РИС. 17.1.11

Декартова прямоугольная система координат на плоскости (обозначается $\mathbb{R}^2$) образована двумя взаимно перпендикулярными осями: Ox **– ось абсцисс,** Oy – **ось ординат,** имеющих общее начало, O – **начало координат** (рис. 17.1.11).

Любая точка M в $\mathbb{R}^2$ имеет две координаты $M(x,y)$. Оси координат имеют единичные векторы: $\vec{i}$ – орт оси Ox, $\vec{j}$ – орт оси Oy. Пара векторов $(\vec{i},\vec{j})$ называется **базисом в** $\mathbb{R}^2$**.**

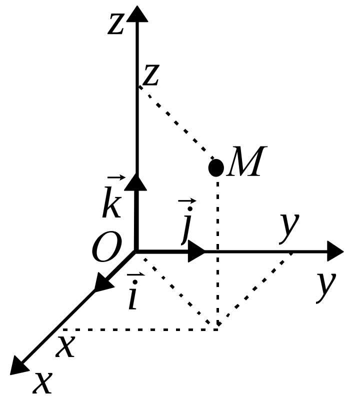


РИС. 17.1.12

Декартова прямоугольная система координат в пространстве ($\mathbb{R}^3$) образована тремя взаимно перпендикулярными осями: Ox **– ось абсцисс,** Oy – **ось ординат,** Oz – **ось аппликат,** точка O – начало координат (рис. 17.1.12). Любая точка M в $\mathbb{R}^3$ имеет три координаты $M(x,y,z)$. Единичные векторы: $\vec{i}$ – орт оси Ox, $\vec{j}$ – орт оси Oy, $\vec{k}$ – орт оси Oz. Тройка векторов $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ образует **базис в** $\mathbb{R}^3$.

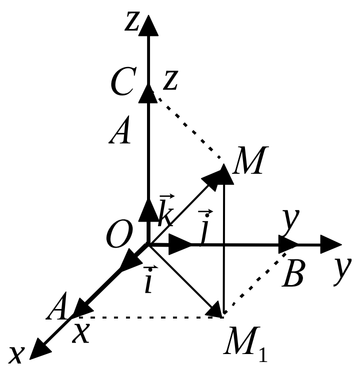


РИС. 17.1.13

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM}$ в $\mathbb{R}^3$, где $O(0,0,0)$, $M(x,y,z)$. Представим вектор $\overrightarrow{OM}$ в виде суммы векторов, лежащих на осях координат (рис. 17.1.13)

$$\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}.$$

Это представление вектора $\overrightarrow{OM}$ называется **разложением вектора** $\overrightarrow{OM}$ по базису, а числа x,y,z называются **координатами вектора** $\overrightarrow{OM}$. Пишут также $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$.

Частный случай. Вектор $\vec{a}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет разложение $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ или $\vec{a} = (x, y)$.

17.1.4. Линейные операции над векторами в координатах

Даны векторы, заданные в координатах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

1. Условие **равенства** векторов $\vec{a} = \vec{b} \iff x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$.

2. **Линейные операции** над векторами:

$$\begin{gathered} \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2); \\ \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2); \\ \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1). \end{gathered} \tag{34}$$

3. **Модуль** вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{35}$$

4. **Направляющие косинусы** вектора $\vec{a}$ – это косинусы углов, образованных вектором $\vec{a}$ с осями координат:

$$\alpha = \vec{a}^\wedge Ox,\ \beta = \vec{a}^\wedge Oy,\ \gamma = \vec{a}^\wedge Oz.$$

Имеем из свойства 1 проекции вектора на ось

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}.$$

5. Единичный вектор $\vec{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ называется **ортом** направления вектора $\vec{a}$.

6. Условие **коллинеарности** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda \iff \vec{a} = \lambda\vec{b}.$$

7. **Координаты вектора** $\overrightarrow{AB}$ по известным координатам начала $A(a_1, b_1, c_1)$ и конца $B(a_2, b_2, c_2)$ находятся по формуле

$$\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1). \tag{36}$$

17.1.5. Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $A(a_1, b_1, c_1)$, $B(a_2, b_2, c_2)$.

Найти координаты точки $M(x_0, y_0, z_0)$, которая делит отрезок AB в отношении λ (рис. 17.1.14), то есть $\frac{AM}{MB} = \lambda$.

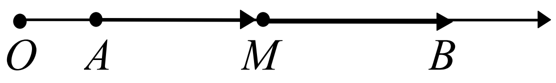


РИС. 17.1.14

Решением задачи являются координаты

$$x_0 = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1+\lambda},\ y_0 = \frac{b_1 + \lambda b_2}{1+\lambda},\ z_0 = \frac{c_1 + \lambda c_2}{1+\lambda}. \qquad \mathbf{(2.4)}$$

Частный случай: $\lambda = 1$, точка $M(x_0, y_0, z_0)$ делит отрезок AB пополам, тогда

$$x_0 = \frac{a_1 + a_2}{2},\ y_0 = \frac{b_1 + b_2}{2},\ z_0 = \frac{c_1 + c_2}{2}.$$

17.2. Контрольные вопросы

1) Как найти сумму векторов по правилу треугольника, параллелограмма?
2) Как построить произведение вектора на число?
3) Как построить разность двух векторов?
4) Что называется проекцией вектора на ось?
5) Что составляет базис в декартовой прямоугольной системе координат?
6) Как записать разложение вектора по базису?
7) Что называется координатами вектора?
8) Как записать линейные операции над векторами в координатах?
9) Как найти модуль, направляющие косинусы, орт вектора, заданного в координатах?
10) Запишите координаты точки, делящей отрезок в данном отношении.

Тема 18. Произведения векторов

18.1. Вопросы для самостоятельного изучения

18.1.1. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a},\hat{}\,\vec{b}).$$

Обозначается скалярное произведение также $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$.

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$;

2) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;

4) $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$;

5) Скалярное произведение вектора на себя $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$ называется **скалярным квадратом** $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;

6) Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Выражение скалярного произведения в координатах

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad . \tag{37}$$

Приложения скалярного произведения

1. Модуль вектора $\vec{a} = (x, y, z)$. В силу свойства 5 скалярного произведения $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{xx + yy + zz} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Угол $\varphi = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\cos\varphi = \cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \qquad (38)$$

которая в координатах имеет вид

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad .$$

3. Условие ортогональности векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

18.1.2. Векторное произведение векторов

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются **компланарными,** если они лежат в одной плоскости (рис. 18.1.1).

Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, приведенных к общему началу, называется **правой**, если из конца вектора $\vec{c}$ видно, что кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит **против часовой стрелки** (рис. 18.1.2). Если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ по часовой стрелке, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется **левой** (рис. 18.1.3).

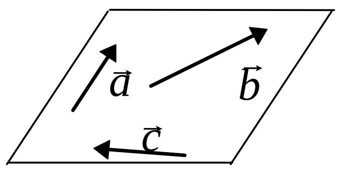


РИС. 18.1.1

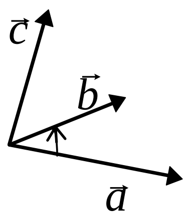


РИС. 18.1.2

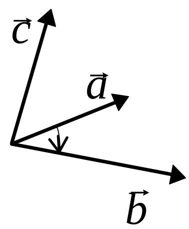


РИС. 18.1.3

Примеры правых троек: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; $\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}$; $\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}$.

Примеры левых троек: $\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}$; $\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}$; $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (рис. 18.1.4), удовлетворяющий трем условиям:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$; 2) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$, 3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка.

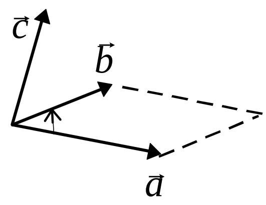


рис. 18.1.4

Обозначение векторного произведения: $\vec{a}\times\vec{b}$ или $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Примеры: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, так как $|\vec{a}\times\vec{a}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin(\vec{a},\hat{}\,\vec{a})=0$;

5) Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулевому вектору $\vec{0}$ тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}.$$

Выражение векторного произведения в координатах

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

или

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right). \qquad (39)$$

Приложения векторного произведения

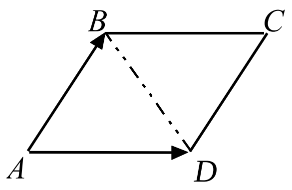


рис. 18.1.5

1. **Площадь треугольника** ABD (рис. 18.1.5).

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|.$$

2. Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 18.1.5).

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|.$$

3. Нахождение вектора, перпендикулярного двум данным векторам

Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}$. Найти такой вектор $\vec{c}$, чтобы $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$. В силу определения векторного произведения в качестве вектора $\vec{c}$ можно взять вектор

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

4. Угол между векторами

$$\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$

18.1.3. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Выражение смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ **через координаты векторов**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (40)$$

Свойства смешанного произведения

1) при круговой перестановке векторов смешанное произведение не меняется $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$;
2) при перестановке двух соседних сомножителей смешанное произведение меняет знак $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$.

Геометрические приложения смешанного произведения

1. Объём V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, как на сторонах (рис. 18.1.6).

$$V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

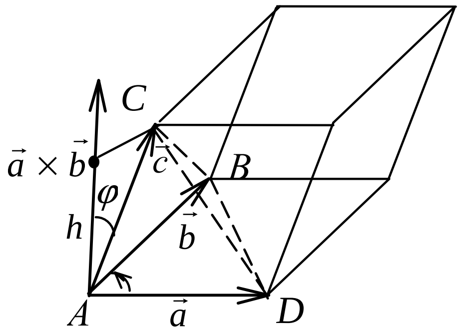


рис. 18.1.6

2. Объём $V_{\text{пир.}}$ пирамиды с вершинами A, B, C, D (рис. 18.1.6).

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right|.$$

3. Ориентация тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Если тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **правая**, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$. Если тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **– левая**, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$.

4. Условие компланарности векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Если векторы компланарны, то есть лежат в одной плоскости, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

Отсюда следует, что четыре точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если компланарны векторы, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ то есть

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} = 0.$$

18.2. Контрольные вопросы

1) Что называется скалярным произведением двух векторов?
2) Сформулируйте свойства скалярного произведения.
3) Запишите выражение скалярного произведения в координатах.
4) Как найти угол между векторами?
5) Запишите условие перпендикулярности двух векторов.
6) Какая тройка векторов называется правой?
7) Что называется векторным произведением двух векторов?
8) Перечислите свойства векторного произведения.
9) Запишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах.
10) Запишите формулы для вычисления площадей треугольника и параллелограмма по известным координатам их вершин;
11) Что называется смешанным произведением векторов?
12) Как записывается смешанное произведение в координатах?

13) Как найти объем параллелепипеда и пирамиды по их вершинам?
14) Какие векторы называются компланарными?
15) Каково условие компланарности векторов?

Тема 19. Комплексные числа

19.1. Вопросы для самостоятельного изучения

19.1.1. Определения

Комплексным числом называется выражение $z = x + iy$, где x, y – действительные числа, а i – новое число, обладающее свойством

$$i^2 = -1 \tag{41}$$

и называемое **мнимой единицей**. Число x называется **действительной частью**, y – **мнимой частью** комплексного числа z. Они обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Множество комплексных чисел обозначается буквой $\mathbb{C}$.

Выражение $z = x + iy$ называется **алгебраической формой** записи комплексного числа. В дальнейшем мы познакомимся и с другими формами записи.

Числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ называются **комплексно-сопряженными**.

Комплексные числа изображаются точками или векторами на плоскости (Рис. 19.1.1). В декартовой системе координат каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие **точка** $M(x, y)$ или **радиус-вектор** $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ с теми же координатами.

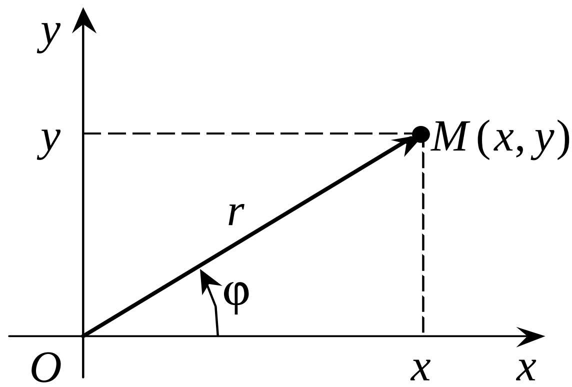


Рис. 19.1.1

Ось Ox называют **действительной осью**, а ось Oy – **мнимой осью**.

Модуль r вектора $\overrightarrow{OM}$ называется **модулем комплексного числа** z и обозначается $|z|$. Следовательно,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{42}$$

Полярный угол φ точки M или аргумент вектора $\overrightarrow{OM}$ называются **аргументом комплексного числа** z и обозначается $\arg z$.

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ \pi, & x < 0. \end{cases} \tag{43}$$

19.1.2. Правила арифметических действий над комплексными числами в алгебраической форме

Арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме проводятся по обычным правилам действий над двучленами с учетом равенства $i^2 = -1$.

1) Сложение.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2) Вычитание.

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3) Умножение.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2 y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Здесь использовалось равенство (41).

Замечание (свойство произведения комплексно-сопряженных чисел).

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2. \tag{44}$$

4) Деление.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2 y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Здесь мы воспользовались свойством произведения комплексно-сопряженных чисел (44).

19.1.3. *Тригонометрическая форма комплексного числа*

Пусть r – модуль, φ – аргумент комплексного числа $z = x + iy$. Тогда, переходя к полярной системе координат (r, φ), получим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число тогда можно переписать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи комплексного числа называется **тригонометрической формой**.

19.1.4. *Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера*

Формула Эйлера

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

Показательная форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

19.1.5. *Действия над комплексными числами в показательной форме*

Сложение и вычитание комплексных чисел удобнее выполнять в алгебраической форме; умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня – в показательной формах.

Пусть

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}, \ z = re^{i\varphi}.$$

1) Умножение

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

2) Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

3) Возведение в степень

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n \left(e^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} \text{ –}$$

формула Муавра, где $n \in \mathbb{Z}$.

4) Извлечение корня целой степени.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \ k = \overline{0, n-1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, так как, начиная с $k = n$, корни повторяются.

19.2. Контрольные вопросы

1) Что называется комплексным числом?
2) Геометрическое изображение комплексного числа. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
3) Комплексно-сопряженные комплексные числа. Свойство произведения комплексно-сопряженных чисел.
4) Правила выполнения арифметических действий над комплексными числами в алгебраической форме.
5) Тригонометрическая форма комплексного числа.
6) Формула Эйлера.
7) Показательная форма комплексного числа.
8) Правила арифметических действий над комплексными числами в показательной форме.

19.3. Практическое задание для самостоятельной работы

1. Образуют ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ базис на плоскости. Если да, то найти координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе.

А) $\vec{a} = \{3,\ 1\}$, $\vec{b} = \{-5,\ 2\}$, $\vec{c} = \{1,\ -5\}$.

Б) $\vec{a} = \{3,\ 0\}$, $\vec{b} = \{2,\ -2\}$, $\vec{c} = \{1,\ 4\}$.

В) $\vec{a} = \{-1,\ 2\}$, $\vec{b} = \{3,\ -4\}$, $\vec{c} = \{2,\ 7\}$.

Г) $\vec{a} = \{1,\ 2\}$, $\vec{b} = \{4,\ 2\}$, $\vec{c} = \{3,\ 7\}$.

2. Найти угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$.

А) $\vec{a} = \{3\ ;\ 2\ ;\ -4\}$, $\vec{b} = \{-5\ ;\ 0\ ;\ 1\}$,

Б) $\vec{a} = \{-2\ ;\ 1\ ;\ -7\}$, $\vec{b} = \{6\ ;\ 5\ ;\ 2\}$,

В) $\vec{a} = \{-4\ ;\ 1\ ;\ 7\}$, $\vec{b} = \{3\ ;\ 1\ ;\ 2\}$,

3. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, где

А) $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 6$, $\angle(\vec{p},\vec{q}) = \pi/6$.

Б) $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p},\vec{q}) = \pi/4$.

В) $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{p},\vec{q}) = 2\pi/3$.

Вычислить длину диагоналей этого параллелограмма, угол между диагоналями и площадь параллелограмма.

4. Компланарны ли векторы

А) $\vec{a}=(-2\ ;1\ ;-5)$, $\vec{b}=(-4\ ;\ 2\ ;-10)$, $\vec{c}=(2\ ;\ 5\ ;\ 4)$,

Б) $\vec{a}=(3\ ;\ 4\ ;\ 6)$, $\vec{b}=(7\ ;\ 3\ ;\ 1)$, $\vec{c}=(-2\ ;\ 3\ ;-1)$,

В) $\vec{a}=(2\ ;\ 0\ ;\ 9)$, $\vec{b}=(8\ ;\ 0\ ;\ 36)$, $\vec{c}=(-7\ ;\ 5\ ;\ 3)$?

5. Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении $AC:CB=3:4$, если

А) $A(1;1)$, $B(-2;\ -3)$.

Б) $A(2;4)$, $B(5;\ 7)$.

В) $A(3;8)$, $B(5;\ 9)$.

6. Пирамида задана координатами своих вершин

А) $A_1(3;1;0)$, $A_2(4;\ 1;\ 3)$, $A_3(3;\ 5;\ 1)$, $A_4(1;\ 2;\ 7)$,

Б) $A_1(5;3;7)$, $A_2(8;\ 2;\ 1)$, $A_3(6;\ 3;\ 2)$, $A_4(-1;\ -2;\ 7)$,

В) $A_1(7;2;1)$, $A_2(3;\ 5;\ 9)$, $A_3(4;\ -5;\ 0)$, $A_4(3;\ 1;\ 9)$.

Требуется найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани, содержащей вершины A_1, A_2, A_3; 4) объем пирамиды; 5) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3; 6) уравнение высоты A_4B, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$; 7) расстояние от вершины A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$; 8) угол между ребром A_1A_4 и гранью, содержащей вершины A_1, A_2, A_3.

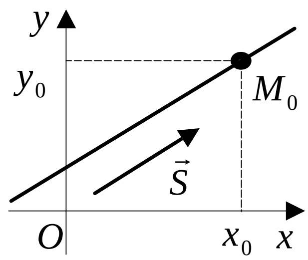
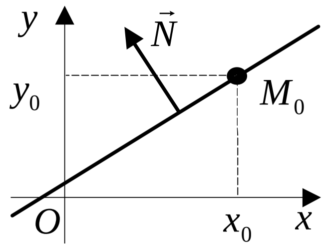
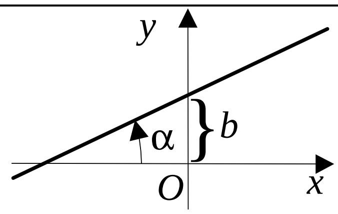
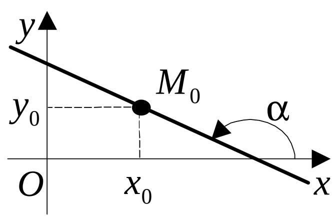
РАЗДЕЛ. VIII. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 20. Основные задачи аналитической геометрии

20.1. Вопросы для самостоятельного изучения

Таблица 20.1.1. Уравнения прямой на плоскости

$Ax + By + C = 0$ (общее уравнение прямой), $A^2 + B^2 \neq 0$

Название уравнения	Уравнение	Смысл параметров	Геометрическое изображение
1. Каноническое уравнение прямой.	$\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}$	$M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой, $\vec{S} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой	
2. Уравнение прямой с нормальным вектором.	$A(x-x_0)+$ $+B(y-y_0)=0$	$M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой, $\vec{N} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой	
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.	$y = kx + b$	$k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент, b – отрезок, отсекаемый на оси Oy.	
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении	$y - y_0 =$ $= k(x - x_0)$	$k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент, $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой.	

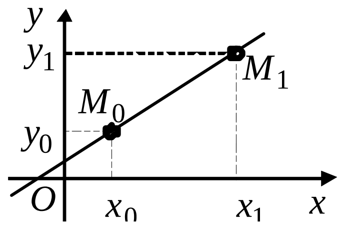
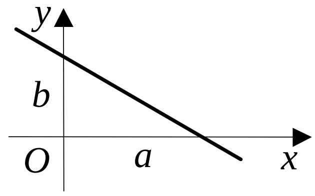
Название уравнения	Уравнение	Смысл параметров	Геометрическое изображение
5. Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=$ $=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$	$M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$ – точки на прямой.	
6. Уравнение прямой в отрезках.	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	a, b – отрезки, отсекаемые на осях координат.	

ТАБЛИЦА 20.1.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРАВЛЕНИЯ ПРЯМОЙ l И ПРЯМЫХ $l_1 \parallel l$, $l_2 \perp l$

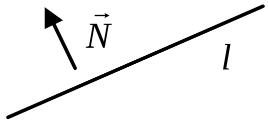
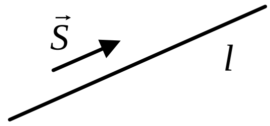
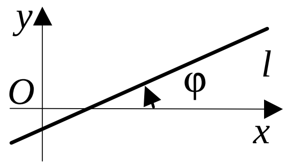
Определение, формула	Нормальный вектор	Направляющий вектор	Угловой коэффициент
1. Обозначение.	$\vec{N}=(A,B)$	$\vec{S}=(m,n)$	k
2. Изображение, определение.	 $\vec{N}$ – вектор, перпендикулярный прямой l.	 $\vec{S}$ – вектор, параллельный прямой l.	 $k=\operatorname{tg}\varphi$, φ – угол наклона прямой l к оси Ox.
3. Формулы связи.	$k=-A/B$, $\vec{S}=(B,-A)$	$k=n/m$, $\vec{N}=(n,-m)$	$\vec{S}=(1,k)$, $\vec{N}=(k,-1)$
4. Направление прямой l_1 ($l_1 \parallel l$).	$\vec{N}_1=\vec{N}$	$\vec{S}_1=\vec{S}$	$k_1=k$
5. Направление прямой l_2 ($l_2 \perp l$).	$\vec{N}_2=\vec{S}$	$\vec{S}_2=\vec{N}$	$k_2=-\dfrac{1}{k}$

Таблица 20.1.3. Основные задачи на прямую в плоскости

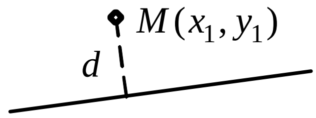
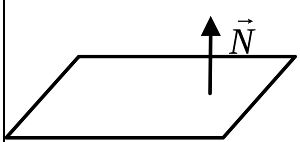
Задача	Решение
1. Проверить принадлежность точки $M(x_1, y_1)$ прямой $Ax+By+C=0$.	Точка M лежит на прямой, если $Ax_1+By_1+C=0$.
2. Найти расстояние d от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$.	$d=\dfrac{\lvert Ax_1+By_1+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 
3. Найти угол φ между прямыми а) $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$; б) $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$; в) $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$, $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$.	а) $\cos\varphi=\dfrac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\lvert\vec{N}_1\rvert\cdot\lvert\vec{N}_2\rvert}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$; б) $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$; в) $\cos\varphi=\dfrac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\lvert\vec{S}_1\rvert\cdot\lvert\vec{S}_2\rvert}=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$.
4. Проверить параллельность прямых.	а) $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$; б) $k_1=k_2$; в) $\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.
5. Проверить перпендикулярность прямых.	а) $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$; б) $k_1\cdot k_2=-1$; в) $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2=0$.
6. Найти точку пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2=0.$	Решить систему уравнений $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$

Таблица 20.1.4. Плоскость в пространстве

Понятие	Изображение	Уравнение, формула
1. Общее уравнение плоскости.		$Ax+By+Cz+D=0$, где $\vec{N}=(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости.

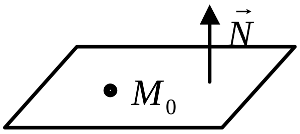
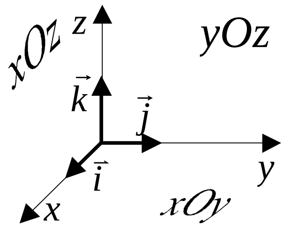
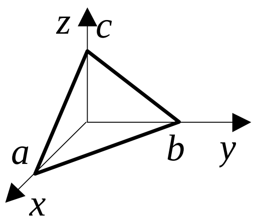
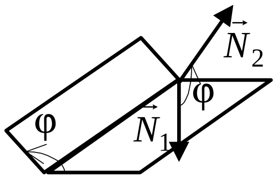
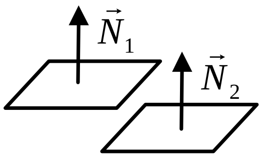
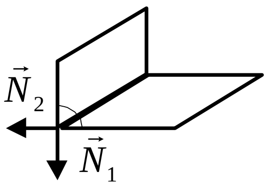
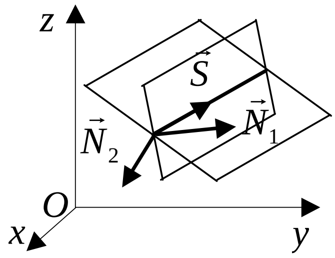
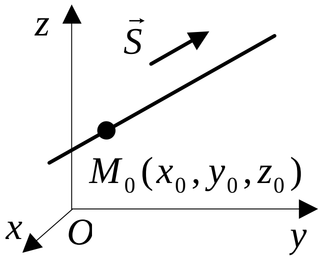
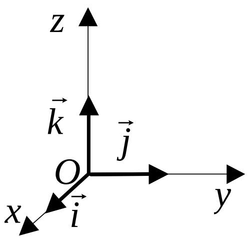
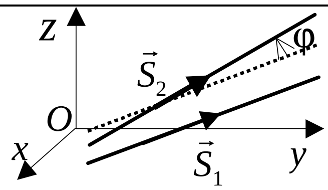
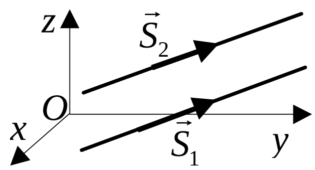
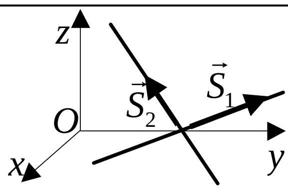
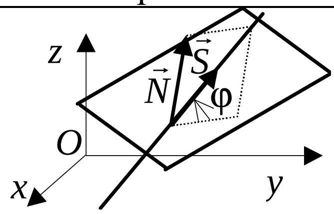
Понятие	Изображение	Уравнение, формула
2. Уравнение плоскости с нормальным вектором.		$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где $\vec{N}=(A,B,C)$ – нормальный вектор, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка на плоскости.
3. Частные случаи: а) плоскость xOy; б) плоскость xOz; в) плоскость yOz.		а) $\vec{N}=\vec{k}=(0,0,1)\Rightarrow z=0$; б) $\vec{N}=\vec{j}=(0,1,0)\Rightarrow y=0$; в) $\vec{N}=\vec{i}=(1,0,0)\Rightarrow x=0$.
4. Уравнение плоскости в отрезках.		$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где *a*, *b*, *c* – величины отрезков, отсекаемых на осях координат (с учетом знака).
5. Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.		$\cos\phi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\lvert\vec{N}_1\rvert\cdot\lvert\vec{N}_2\rvert}=$ $=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.
6. Условие параллельности плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.		$\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Leftrightarrow$ $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
7. Условие перпендикулярности плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.		$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow$ $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Таблица 20.1.5. Прямая в пространстве

Понятия	Изображения	Уравнение (формула)
1. Общие уравнения прямой.		$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{matrix}\right\}$ нормальные векторы плоскостей.
2. Канонические уравнения прямой.		$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, где $\vec{S} = (m, n, p)$ – направляющий вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой.
3. Частные случаи: а) ось Ox; б) ось Oy; в) ось Oz.		а) $\vec{S} = \vec{i} = (1,0,0) \Rightarrow z = 0, y = 0$ б) $\vec{S} = \vec{j} = (0,1,0) \Rightarrow x = 0, z = 0$ в) $\vec{S} = \vec{k} = (0,0,1) \Rightarrow x = 0, y = 0$
4. Угол между прямыми.		$\cos\varphi = \dfrac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\lvert\vec{S}_1\rvert \cdot \lvert\vec{S}_2\rvert}$
5. Условие параллельности прямых.		$\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ $\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$
6. Условие перпендикулярности прямых		$\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$

Понятия	Изображения	Уравнение (формула)
7. Угол между прямой и плоскостью.		$\sin\varphi = \dfrac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{\lvert\vec{S}\rvert\cdot\lvert\vec{N}\rvert}$

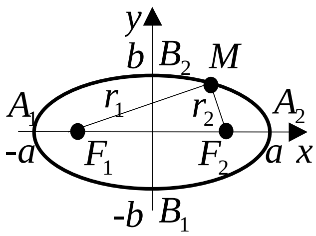
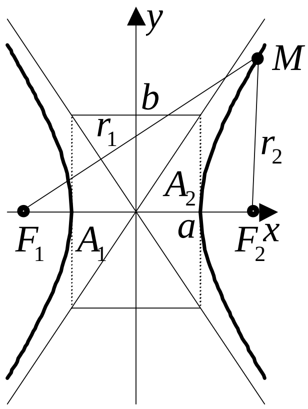
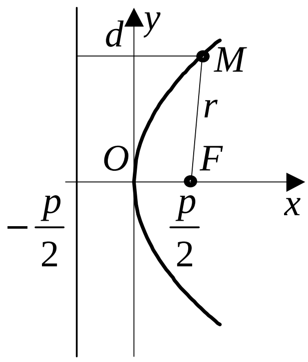
20.2. Контрольные вопросы

1) Что называется направляющим вектором прямой, нормальным вектором прямой, угловым коэффициентом прямой?
2) Какой вид имеет каноническое уравнение прямой?
3) Какой вид имеет уравнение прямой с нормальным вектором?
4) Какие уравнения прямой содержат угловой коэффициент?
5) Запишите уравнение прямой, проходящей через две точки.
6) Запишите уравнение прямой в отрезках.
7) Как найти точку пересечения прямых?
8) Как найти угол между прямыми?
9) Сформулируйте условия параллельности прямых.
10) Сформулируйте условия перпендикулярности прямых.
11) Как найти точку пересечения прямых?
12) Как найти расстояние от точки до прямой?
13) Какой вектор называется нормальным вектором плоскости?
14) Как записывается уравнение плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором?
15) Какой вид имеет общее уравнение плоскости? Какую степень имеет это уравнение?
16) Что необходимо найти, чтобы записать уравнение плоскости?
17) Как найти угол между плоскостями?
18) Как записываются общие уравнения прямой в пространстве?
19) Какой вид имеют канонические уравнения прямой в пространстве?
20) Что необходимо знать, чтобы записать канонические уравнения прямой?
21) Как найти угол между прямыми?
22) Как найти точку пересечения прямой и плоскости?

Тема 21. Кривые второго порядка

Таблица 20.2.1. ***Кривые второго порядка***

Понятие, свойство	Эллипс	Гипербола	Парабола
1. Каноническое уравнение.	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$

Понятие, свойство	Эллипс	Гипербола	Парабола
2. График.			
3. Вершины.	$A_1(-a,0), A_2(a,0)$ $B_1(0,-b), B_2(0,b)$	$A_1(-a,0), A_2(a,0)$	$O(0,0)$
4. Оси.	$2a$ – большая ось, $2b$ – малая ось $(a>b)$	$2a$ – действительная ось, $2b$ – мнимая ось	
5. Фокусы.	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$F(p/2,0)$
6. Основное (фокальное) свойство.	$r_1+r_2=2a$	$\lvert r_1-r_2\rvert=2a$	$r=d$
7. Эксцентриситет.	$\varepsilon=c/a$ $\varepsilon<1$	$\varepsilon=c/a$ $\varepsilon>1$	$\varepsilon=1$
8. Дополнительные свойства.		$y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты	$x=-p/2$ – директриса, p – фокальный параметр

21.1. Контрольные вопросы

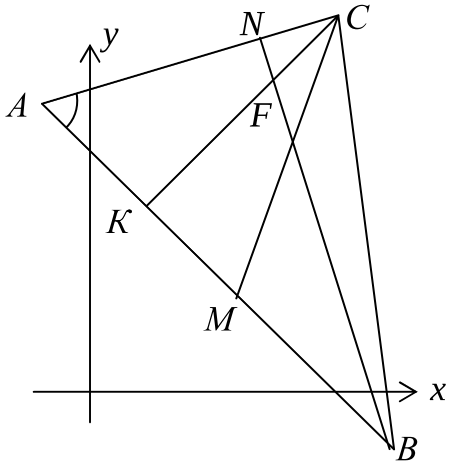
1) Какой вид имеют канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы?
2) Дайте определение фокусов для эллипса, гиперболы параболы.

3) Что называется эксцентриситетом и как по его значению определить вид кривой?
4) Что называется асимптотами гиперболы и какой вид имеют их уравнения?
5) Что называется директрисой параболы и какой вид имеет ее уравнение?
6) Постройте графики эллипса, гиперболы и параболы.

21.2. Практическое задание для самостоятельной работы

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: A (-2;7), B(10;-2), C(8;12).

Найти:



1) Длину стороны *AB*.

2) Внутренний угол *A*.

3) Уравнение медианы *CM*.

4) Уравнение высоты *CK*

5) Точку *F* пересечения высот *CK* и *BN*.

6) Площадь треугольника *ABC*.

Варианты заданий:

1. A(-8;-3), B(4; -12), C(8; 10).
2. A(-5; 7), B(7; -2), C(11; 20).
3. A(-12; -1), B (0; -10), C (4; 12).
4. A (-10; 9), B (2; 0), C (6; 22).
5. A (0; 2), B (12; -7), C (16; 15).
6. A(-9; 6), B (3; -3), C (17; 19).
7. A(1; 0), B(13; -9), C(17;16).
8. A (-4; 10), B(8;1), C (12;23).
9. A(2; 5), B(14; -4), C18; 18).
10. A(-1; 4), B(11;-5), C(15;17).

2. Найти центр и радиус окружности, определить количество пересечений с осями координат и расстояние от центра окружности до данной точки M(x,y), если окружность задана уравнением:

1) $x^2+ y^2 - 4x - 8y -11 = 0$; M(-3; 2).

2) $2x^2+ 2y^2 + 12x - 8y - 6 = 0$; M(0; -2).

3) $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 2 = 0$; M(4; - 4).

4) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 72 = 0$; M(1; 3).

3. Написать каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно осей координат, если известно расстояние между фокусами F_1F_2 и эксцентриситет ε :

1) $F_1F_2 = 2\sqrt{3}$, $\varepsilon = 1/2$.

2) $F_1F_2 = 2\sqrt{5}$, $\varepsilon = 1/3$.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно осей координат, если известна большая полуось a и эксцентриситет ε:

1) $a = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \sqrt{2/3}$.

2) $a = \sqrt{10}$, $\varepsilon = 2/\sqrt{10}$.

5. Составить уравнения геометрического места точек, отношения расстояний которых до данной точки A(x,y) и до данной прямой $x=a$ равно числу h. Полученное уравнение привести к каноническому виду. Затем построить кривую.

1) $A(-8;0)$, $x = -9$, $h = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;

2) $A(-6;0)$, $x = -8$, $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $A(-4;0)$, $x = -1$, $h = 2$;

4) $A(-3;0)$, $x = -4/3$, $h = 1{,}5$;

5) $A(-2;0)$, $x = 2{,}5$, $h = 1$;

6) $A(2;0)$, $x = 4{,}5$, $h = 2/3$;

7) $A(3;0)$, $x = 4/3$, $h = 1{,}5$;

8) $A(4;0)$, $x = 5$, $h = 1$;

9) $A(6;0)$, $x = 1{,}5$, $h = 2$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

а) основная литература

Математика: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Б.Т. Кузнецов – 2-е изд., перераб. и доп. – М: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 719 с. – (Серия «Высшее профессиональное образование: Экономика и управление»).

Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – ИНФРА-М, 2007. – 575 с. (Серия «Высшее образование»).

б) дополнительная литература

Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. – М.: ЮНИТИ, 2004.

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2000.

Щипачев В.С. Высшая математика. М.: ВШ, 2003.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1. М.: ВШ, 2000.

Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. СПб.: Питер, 2004.

Астровский А.И., Широкова Н.А. Курс лекций по высшей математике. Ч.1. – Мн.: ИСЗ, 2002.

Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. – Мн.: ТетраСистемс, 2002.

Ивашев-Мусатов О.С. Начала математического анализа. – М.: Физматлит, 2002.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. В 2-х частях. – М.: Проспект, 2004.

Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. В 2-х томах.– М.: Физматлит, 2002.

Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч.2. Основы математического анализа и элементы дифференциальных уравнений. Мн.: Амалфея, 2003.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 608 с.

Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х частях. – СПб.: Изд-во «Лань», 2002.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В двух частях. Часть I. – 4-е изд.испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 304 с., ил.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В двух частях. Часть II. – 4-е изд.испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 415 с., ил.